

*Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова»*

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Высшая математика»

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль подготовки
«Экономика и финансы»

Квалификация (степень) выпускника – бакалавр

Форма обучения - очная

Год начала подготовки - 2023

Утверждена в составе ОПОП.

Составитель: доцент кафедры алгебры и анализа, к.э.н., Хугаева Л.Т.

Владикавказ 2023

1. Структура, и общая трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц (252 часа).

	Очная форма обучения	Заочная форма обучения
Курс	1	
Семестр	1, 2	
Лекции	18/36	
Практические (семинарские) занятия	18/36	
Лабораторные занятия		
Консультации		
Итого аудиторных занятий	36 / 72	
Самостоятельная работа	72/36	
Курсовая работа		
Форма контроля		
Зачет		
Экзамен	36	
Общее количество часов	252 (/108/144)	

2. Цели освоения дисциплины

- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования экономических процессов;
- воспитание достаточно высокой математической культуры: ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке студентов;
- выработка представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре,
- умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;
- овладение математическими методами для решения экономических задач и приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов математики при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных явлений и процессов в экономике,

Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже компетенциями. Они способствуют его социальной мобильности, устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (научно-исследовательская деятельность, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Высшая математика» относится к дисциплинам Блок 1. Часть, формируемая участниками образовательных отношений Б1.О.09

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» (программа средней общеобразовательной школы) или

соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования. Студенты должны владеть знаниями и компетенциями, соответствующими школьной программе по математике.

Знания, полученные при изучении дисциплины «Высшая математика» могут быть использованы при изучении курсов «Финансовая математика», «Микроэкономика», «Эконометрика», «Макроэкономика» и др.

4. Требования к результатам освоения дисциплины

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен обладать следующими компетенциями (результатами освоения образовательной программы):

- Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1).

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Высшая математика»:

Универсальные компетенции выпускников				
Код и наименование универсальной компетенции (УК)	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции	Результаты освоения компетенции		
		Знать	Уметь	Владеть
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Осуществляет поиск необходимой информации, опираясь на результаты анализа поставленной задачи.	Знает основные методы критического анализа и основы системного подхода как общенаучного метода.	1. Умеет анализировать задачу, используя основы критического анализа и системного подхода. 2. Умеет осуществлять поиск необходимой для решения поставленной задачи информации, критически оценивая надежность различных источников	Практическим опытом анализа задач.

		информации	
УК-1.2. . Разрабатывает варианты решения проблемной ситуации на основе критического анализа доступных источников информации.	Знает критерии сопоставления различных вариантов решения поставленной задачи.	1. Умеет осуществлять критический анализ собранной информации на соответствие ее условиям и критериям решения поставленной задачи. 2. Умеет отличать факты от мнений, интерпретаций и оценок при анализе собранной информации. 3. Умеет сопоставлять и оценивать различные варианты решения поставленной задачи, определяя их достоинства и недостатки.	Практическим опытом работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.
УК-1.3. Выбирает оптимальный вариант решения задачи, аргументируя свой выбор.	Знает принципы, критерии, правила построения суждения и оценок.	1. Умеет формировать собственные суждения и оценки, грамотно и логично	Основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки

			<p>аргументируя свою точку зрения.</p> <p>2. Умеет применять теоретические знания в решении практических задач.</p>	<p>информации для представления в доступной и понятной форме результатов своей профессиональной деятельности.</p>
--	--	--	---	---

5. Содержание и учебно-методическая карта дисциплины

Таблица 5.1.

Номер недели	Наименование тем (вопросов), изучаемых по данной дисциплине	Занятия		Самостоятельная работа Студентов		Формы контроля	Количество баллов		Литература
		л	пр	Содержание	Часы		min	max	
	Семестр 1								
1-2	Прямая линия на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Уравнение линии. Некоторые элементарные задачи.	2	2	Координаты точки на прямой и на плоскости. Площадь треугольника и многоугольника.	8	Опрос на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
3-4	Прямая линия на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.	2	2	Нормальное уравнение прямой. Точка пересечения двух прямых.	8	мини-опрос			[1], [5], [2], [3], [4],
5-6	Уравнение пучка прямых. Уравнение	2	2	Расстояние от точки до	8	Опрос на			[1], [5], [2], [3],

	прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках.			прямой.		занятиях			[4],
7-8	Кривые второго порядка. Окружность Эллипс. Гипербола.	2	2	Парабола	8	Проверка работы			[1], [5], [2], [3], [4],
9-10	Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.	2	2	Элементарные преобразования матриц.	8				
11-12	Определители квадратных матриц. Свойства определителей. Способы вычисления.	2	2	Ранг матрицы.	8	Опрос на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
13-14	Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера, методом обратной матрицы. Метод Гаусса.	2	2	Решение различных систем линейных уравнений.	8	Проверка на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
15-16	Применение теории матриц в экономике.	2	2	Различные задачи на применение аналитической геометрии и линейной алгебры в экономике.	8				
	ИТОГО ЗА 1 семестр	18	18		72				
	Семестр 2								
1	Множества. Абсолютная величина действительного числа. Понятие функции. Способы задания функции. Понятие неявной, обратной и сложной функций.	2	2	Основные свойства функции. Графики основных элементарных функций.	2	Опрос на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
2	Теория пределов Предел функции в точке. Односторонние пределы Бесконечно большие и	2	2		2	мини-опрос			[1], [5], [2], [3], [4],

	бесконечно малые величины. Основные теоремы о пределах.								
3	Первый замечательный предел Второй замечательный предел. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.	2	2	Другие замечательные пределы.	2	Проверка на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
4	Непрерывность функции Некоторые свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции.	2	2	Применения производной при решении экономических задач.	2	мини-опрос			[1], [5], [2], [3], [4],
5	Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.	2	2	Вычисление производных функций, заданных неявно, параметрически.	2	Вопросы в билетах. Проверка на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
6	Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования. Производная неявной, обратной и сложной функций. Производные высших порядков. Производная степенно-показательной функции.	2	2	Исследование функций при помощи производных. Решение задач	2	мини-опрос			[1], [5], [2], [3], [4],
7	Условие постоянства, возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	2	2	Наибольшее и наименьшее значения функции. В задачах экономики.	2	Опрос на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
8	Правило Лопиталья. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты кривой. Полное исследование функции	2	2	Исследование функции и построение графика. Приближенное решение уравнений.	2	Проверка на занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],

9	Приложения дифференциального исчисления в экономике.	2	2	Графики разрывных функций	2	мини-опрос			
10	Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Свойства. Интегралы основных элементарных функций. Способы интегрирования. Интегрирование рациональных алгебраических функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций	2	2	Тригонометрические подстановки.	2	Решение задач на практич. занятиях			[1], [5], [2], [3], [4],
11	Задача о площади криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	2	2	Приближенное вычисление определенных интегралов.	2	мини-опрос			[1], [5], [2], [3], [4],
12	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Объем тела вращения. Длина дуги.	2	2						
13	Дифференциал функции 2-х переменных Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	2	2	Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.	2				
14	Дифференциальные уравнения. Общие понятия. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Линейные дифференциальные	2	2	Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение степени.	2				[1], [5], [2], [3], [4],

	уравнения 1-го порядка								
15	Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.	2	2	Применение дифференциальных уравнений в экономике.	2				[1], [5], [2], [3], [4],
16	Числовые ряды. Основные понятия. Сходимость ряда. Некоторые свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.	2	2	Знакопеременные ряды.	2				[1], [5], [2], [3], [4],
17	Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.	2	2	Применение рядов в приближенных вычислениях.	2				[1], [5], [2], [3], [4],
18	Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами.	2	2	Тригонометрическая форма комплексного числа.	2				[1], [5], [2], [3], [4],
	ИТОГО ЗА 2 СЕМЕСТР	36	36		36				

Примечания:

- Все виды учебной работы могут проводиться дистанционно на основании локальных нормативных актов.
- В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по индивидуальной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины может осуществляться через индивидуальные консультации преподавателя очно, в часы консультаций, по электронной почте и с использованием платформ дистанционного обучения.

6. Образовательные технологии

В соответствии с государственными образовательными стандартами высшего образования реализация учебного процесса должна предусматривать проведение занятий в интерактивных и активных формах. Внедрение этих форм обучения – одно из важнейших направлений совершенствования подготовки студентов в современном вузе. Цель – повышение эффективности образовательного процесса, достижение всеми обучающимися высоких результатов обучения.

Интерактивные формы проведения занятий предполагают обучение в сотрудничестве. Все участники образовательного процесса (преподаватель и студенты) взаимодействуют друг с другом, обмениваются информацией, совместно решают проблемы, моделируют ситуации. Суть использования активных и интерактивных форм проведения состоит в погружении студентов в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем, оптимальную для выработки навыков и качеств будущего специалиста.

Для решения воспитательных и учебных задач преподавателем могут быть использованы следующие интерактивные формы обучения.

Традиционные лекции и практические (семинарские) занятия с использованием современных интерактивных технологий.

Лекция-диалог – содержание подается через серию вопросов, на которые студент должен отвечать непосредственно в ходе лекции.

Онлайн-семинар – разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или презентаций через Интернет в режиме реального времени. Каждый из участников находится у своего компьютера (средства связи), а связь между ними поддерживается через Интернет посредством загружаемого приложения, установленного на компьютере каждого участника.

Видеоконференция – сеанс видеоконференцсвязи (ВКС) – это технология интерактивного взаимодействия двух и более участников образовательного процесса для обмена информацией в реальном режиме времени.

Видео-лекция – снятая на камеру сокращенная лекция, дополненная фотографиями и схемами, иллюстрирующая подаваемый в лекции материал.

Технология электронного обучения (реализуется при помощи электронной образовательной среды СОГУ при использовании ресурсов ЭБС, при проведении автоматизированного тестирования и т. д.).

Творческое задание составляет содержание (основу) любой интерактивной формы проведения занятия. Выполнение творческих заданий требует от студента воспроизведения полученной ранее информации в форме, определяемой преподавателем и требующей творческого подхода: 1) подборка примеров из практики; 2) подборка материала по определенной проблеме;

Публичная презентация проекта - самый эффективный способ донесения важной информации при публичных выступлениях. Слайд-презентации позволяют эффектно и наглядно представить содержание, выделить и проиллюстрировать сообщение.

Интерактивная лекция представляет собой выступление преподавателя перед аудиторией студентов с применением следующих интерактивных форм обучения: 1. управляемая дискуссия или беседа; 2. демонстрация слайдов или учебных фильмов; 3. мозговой штурм; 4. мотивационная речь и др.

Разработка проекта позволяет участникам мысленно выйти за пределы аудитории и составить проект своих действий по обсуждаемому вопросу. Участники могут обратиться за консультацией, дополнительной литературой в специализированные учреждения, библиотеки и т.д.

Проблемное обучение - поиск ответов на вопросы по теме.

7. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Самостоятельная работа обучающихся является одним из видов учебных занятий. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

К видам самостоятельной работы при изучении данной дисциплины относятся: написание докладов, эссе, подготовка презентаций, самостоятельное изучение литературы по теме и составление по ней конспектов, работа со справочными материалами (терминологическими и иными словарями, энциклопедиями) и т.д.

Темы и формы внеаудиторной самостоятельной работы, ее трудоёмкость содержатся в разделе 5, табл. 5.1.

Методические рекомендации по дисциплине прилагаются.

8. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, рубежной аттестации и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Рабочая программа предусматривает проведение лекционных и практических занятий, а также следующие виды работ: самостоятельную работу студентов по подготовке устных сообщений, написанию докладов, подготовку презентаций и обсуждений по темам дисциплины - работу в активной и интерактивной формах.

Рабочая программа предполагает текущий и промежуточный контроль знаний.

Текущий контроль – это непрерывно осуществляемый мониторинг уровня усвоения знаний и формирования умений и навыков в течение семестра или учебного года. Текущий контроль знаний, умений и навыков студентов осуществляется в ходе учебных (аудиторных) занятий, проводимых по расписанию. Формами текущего контроля выступают опросы на занятиях с целью проверки наличия знаний, необходимых для усвоения нового материала или для выяснения степени усвоения изложенного материала.

Рубежный контроль осуществляется по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра такие контрольные мероприятия проводятся по графику.

Контрольные задания (демоверсии) для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Критерии оценивания представлены в таблице 8.1.

Примеры контрольных заданий по дисциплине для формирования УК– 1:

Семестр 1

1. Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольника.

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 2 & -7 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определитель третьего порядка разложением по строке или столбцу.

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ -6 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

3. Дана матрица A . Найти для неё обратную A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \\ -5 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений одним из перечисленных способов: по правилу Крамера, матричным способом, методом Гаусса, с помощью единичной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 - 8x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

5. Даны вершины $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(4;-3)$ треугольника.

1. Найти длины сторон AB , BC , CA треугольника.
2. Составить уравнения сторон AB , BC , CA (в общем виде).
3. Определить углы треугольника.

6. Привести к каноническому виду уравнение $Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$
 $A=-1, B=16, C=1, E=32, F=47$

Семестр 2

Контрольная работа по теме «Введение в анализ. Пределы и непрерывность»

1. Найти пределы числовых последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n)$.

2. Найти пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{3x^3+x^2+1}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$;

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$;

и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$; к) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$; л) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$; м) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление. Производная»

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$; б) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$; в) $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; г) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$;

д) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; е) $y = \frac{\arccos x}{x}$; ж) $y = \ln \operatorname{tg} x$; з) $y = \operatorname{arctg} \ln(3x-1)$;

и) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}$; к) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; л) $y = \ln \frac{1-e^x}{e^x}$.

2. Найти уравнение касательной к функции $y = x - \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

3. Найти тангенс угла наклона касательной к функции $y = \operatorname{tg}^2 x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$ к положительному направлению оси Ох.

4. Найти экстремумы функции $y = \frac{1}{3} x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

7. Найти дифференциал функции $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

8. Исследовать построить график функции $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$.

Контрольная работа по теме «Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл»

Вычислить интегралы следующих функций:

- 1) $\int \sqrt[3]{(8-3x)^2} dx$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$; 5) $\int \frac{dx}{2x-1}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$;
7) $\int x \sin 2x dx$; 8) $\int x e^{-x} dx$; 9) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 10) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$;

Контрольная работа по теме «Интегральное исчисление. Определенный интеграл»

1. Вычислить интегралы:

- 1) $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; 3) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$;
6) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 8) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$; 9) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$; 10) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2. Найти площадь кривой, ограниченной линиями: $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»

1. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка:

- 1) $xy' = x + 1$; 2) $y dy = (x^2 - 2x) dx$; 3) $xyy' = \ln x$.

2. Решить дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка: $xy'' - y' = 1$;

3. Решить дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

- 1) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16 = 0$; 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Контрольная работа по теме «Функции многих переменных»

Найти частные производные и дифференциал функций:

- 1) $z = x^3 y - y^3 x$; 2) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $u = \ln(x + y + z)$.

Критерии оценивания представлены в таблице 8.1.

Примеры тестовых заданий по дисциплине:

$$\left[\int f(x) dx \right]' = \dots$$

$f(x)dx$

$df(x)$

$f(x)+C$

$+f(x)$

Нет правильного ответа

Множество первообразных функции $f(x) = e^{-5x}$ имеет вид...

$$\frac{1}{5}e^{-5x} + C$$

$$e^{-5x} + C$$

$$+ -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$$

$$-5e^{-5x} + C$$

Нет правильного ответа

Множество первообразных функции $f(x) = e^{3x}$ имеет вид...

$$-\frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$+\frac{1}{3}e^{3x} + C$$

$$e^{3x} + C$$

$$3e^{3x} + C$$

Нет правильного ответа

Множество первообразных функции $f(x) = e^{2x}$ имеет вид...

$$-\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$e^{2x} + C$$

$$+\frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$2e^{2x} + C$$

Нет правильного ответа

Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$?

а) e^{7-5x} ; б) $5e^{7+5x}$?

только а)

только б)

и а), и б)

+ни а), ни б)

нет правильного ответа

Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$?

а) $\frac{1}{5}e^{7+5x}$; б) $\frac{1}{5}e^{7+5x}$?

только а)

только б)

+и а), и б)

ни а), ни б)

нет правильного ответа

Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$?

а) $\frac{1}{5}e^{7x+15}$; б) $\frac{1}{7}e^{7x+15} + 11$?

только а)

+только б)

и а), и б)

ни а), ни б)

нет правильного ответа

Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$?

а) $\frac{1}{7}e^{7x+15}$; б) $7e^{7x+15}$?

+только а)

только б)

и а), и б)

ни а), ни б)

нет правильного ответа

Первообразными функциями $y = 15\sin 6x$ являются...

а) $-2,5\cos 6x + 39$

б) $90\cos 6x$

в) $-15\cos 6x - 25$

г) $-2,5\cos 6x$

а) и в)

+а) и г)

только б)

ни одна

нет правильного ответа

Чему равен определенный интеграл $\int x^6 dx$?

$+\frac{x^7}{7} + C$

$x^7 + C$

$6x^5 + C$

$\frac{x^6}{6} + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$?

$-\operatorname{tg} x + C$

$+-\operatorname{ctgx} + C$

$\operatorname{tg} x + C$

$\operatorname{ctgx} + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$?

$-\operatorname{tg} x + C$

$-\operatorname{ctgx} + C$

$+\operatorname{tg} x + C$

$\operatorname{ctgx} + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1+x^2}$?

$\ln(1+x^2) + C$

$\operatorname{arcctgx} + C$

$+\operatorname{arctgx} + C$

$\ln x + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}$?

$\ln|5+\sqrt{x^2+25}| + C$

$0,2 \operatorname{arctg}(0,2x) + C$

$\operatorname{arcsin}(0,2x) + C$

$+\ln|x+\sqrt{x^2+25}| + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$?

$\ln|5+\sqrt{x^2+25}| + C$

$0,2 \operatorname{arctg}(0,2x) + C$

$+\operatorname{arcsin}(0,2x) + C$

$\ln|x+\sqrt{x^2+25}| + C$

Нет правильного ответа

Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{25+x^2}$?

$\ln|5+\sqrt{x^2+25}| + C$

$+0,2 \operatorname{arctg}(0,2x) + C$

$$\arcsin(0,2x)+C$$

$$\ln\left|x+\sqrt{x^2+25}\right|+C$$

Нет правильного ответа

Установить соответствие между интегралом и его значением

А) $\int \frac{dx}{x}$

Б) $\int \sin x dx$

В) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

Г) $\int x^4 dx$

а) $-\cos x + C$

б) $\ln|x| + C$

в) $\cos x + C$

г) $\arctg x + C$

д) $\frac{x^5}{5} + C$

А-б Б-в В-г Г-д

+А-б Б-а В-г Г-д

А-г Б-а В-в Г-д

А-г Б-в В-а Г-д

А-а Б-б В-в Г-г

Методика формирования результирующей оценки

Таблица 8.1

Этап	Форма контроля	Критерии оценивания			
1. Текущий контроль (max 20 баллов за 1 модуль)					
		4 балла	3 балла	2 балла	0–1 баллов
	Посещение занятий (max 4 б.)	Студент посетил более 85% занятий	Студент посетил 71–85% занятий	Студент посетил 56–70% занятий	Студент посетил менее 56% занятий
		11–13 баллов	8–10 баллов	6–7 баллов	0–5 баллов
	Текущая работа в течение модуля (max 13б.)	Студент активно работает на занятиях, превосходно выполняет все задания преподавателя.	Студент активно работает на занятиях, хорошо выполняет задания преподавателя.	Студент недостаточно активно работает на занятиях, удовлетворительно выполняет задания преподавателя.	Студент недостаточно активно работает на занятиях, неудовлетворительно выполняет задания преподавателя.
		3 балла	2 балла	1 балл	0 баллов
	Доклад, презентация (max 3б.) / опорный конспект (max 3б.)	Тема полностью раскрыта. Превосходное владение материалом. Высокий уровень	Тема в основном раскрыта. Хорошее владение материалом. Средний уровень самостоятельности.	Тема частично раскрыта. Удовлетворительное владение материалом. Низкий уровень	Тема не раскрыта. Неудовлетворительно владение материалом. Недостаточный уровень

		самостоятельности, логичности, аргументированности. Превосходный стиль изложения.	логичности, аргументированности. Хороший стиль изложения.	самостоятельности, логичности, аргументированности. Удовлетворительный стиль изложения.	самостоятельности, логичности, аргументированности. Неудовлетворительный стиль изложения.
2. Рубежный контроль (15б. за 1 модуль)					
		13–15 баллов	10–12 балл	8–9 баллов	0–7 баллов
	Контрольная работа	Правильно выполнены все задания. Продemonстрирован высокий уровень владения материалом. Проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.	Правильно выполнена большая часть заданий. Присутствуют незначительные ошибки. Продemonстрирован хороший уровень владения материалом. Проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.	Задания выполнены более чем наполовину. Присутствуют серьезные ошибки. Продemonстрирован удовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.	Задания выполнены менее чем наполовину. Продemonстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.
3. Итоговый контроль по дисциплине					
		26–30 баллов	20–25 балла	15–19 баллов	0–14 баллов
	Экзамен/зачет	Дан полный, развернутый ответ на поставленный вопрос. Ответ формулируется в терминах науки, изложен литературным языком, логичен, доказателен, демонстрирует авторскую позицию студента.	Дан полный ответ на поставленный вопрос, показано умение выделить существенные и несущественные признаки, причинно-следственные связи. Но допущены незначительные ошибки, исправленные студентом с помощью «наводящих» вопросов преподавателя.	Дан недостаточно полный ответ. Студент не способен самостоятельно выделить существенные и несущественные признаки и причинно-следственные связи. Речевое оформление требует поправок, коррекции.	Не получены ответы по базовым вопросам дисциплины или дан неполный ответ и допущены грубые ошибки. Речь неграмотная. Уточняющие вопросы преподавателя не приводят к коррекции ответа студента не только на поставленный вопрос, но и на другие вопросы дисциплины.

Студенты, получившие в ходе текущего и рубежного контроля 50-70 баллов, автоматически получают «Зачет» или оценку «удовлетворительно». Для получения более высокого балла («хорошо» или «отлично») студент обязан явиться на экзамен и сдавать экзамен по шкале от 0-30 баллов в дополнение к накопленным за семестр баллам.

Вопросы к зачету в 1 семестре

1. Середина отрезка.
2. Площадь треугольника.
3. Перевод прямоугольных координат в полярные координаты и наоборот.
4. Площадь многоугольника.
5. Прямая на плоскости (повторение).
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Общее уравнение прямой.
8. Уравнений прямой, проходящей через точку в заданном направлении.
9. Уравнений прямой, проходящей через две точки.
10. Расстояние от точки до прямой.
11. Условие параллельности прямых.
12. Условие перпендикулярности прямых.
13. Формула угла между прямыми.
14. Уравнение окружности.
15. Каноническое уравнение эллипса
16. Исследование формы эллипса.
17. Каноническое уравнение гиперболы.
18. Исследование формы гиперболы.
19. Каноническое уравнение параболы.
20. Исследование формы параболы
21. Определители 2-го и 3-го порядков.
22. Свойства и правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
23. Миноры и алгебраические дополнения.
24. Вычисление определителя разложением по элементам ряда.
25. Вычисление определителя занулением элементов строки (столбца).
26. Понятие матрицы.
27. Виды матриц.
28. Линейные операции над матрицами.
29. Транспонирование и умножение матриц.
30. Свойства линейных операций над матрицами.
31. Свойства матриц.
32. Обратная матрица, способы ее вычисления.
33. Решение СЛАУ методом Крамера.
34. Решение СЛАУ методом Гаусса. Решение матричных уравнений (с нахождением обратной матрицы).

Вопросы к экзамену во 2 семестре

35. Понятие предела последовательности.
36. Свойства предела последовательности.
37. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших величин.
38. Понятие функции.
39. Область определения, область значений функции.
40. Простейшие функциональные зависимости.
41. Графики основных элементарных функций (повторение).
42. Способы задания функции.
43. Обратные функции.
44. Явно и неявно заданная функция.

45. Предел функции.
46. Свойства пределов.
47. Раскрытие некоторых видов неопределенностей.
48. Первый замечательный предел.
49. Число e (число Эйлера). Второй замечательный предел.
50. Понятие непрерывности функции.
51. Классификация разрывов функции.
52. Горизонтальная, вертикальная и наклонная асимптоты.
53. Понятие производной.
54. Физический и геометрический смысл производной.
55. Основные правила дифференцирования (умножение на число, суммы).
56. Основные правила дифференцирования (произведения, частного).
57. Таблица производных.
58. Производная сложной функции. Правило цепочки.
59. Производные высшего порядка, их вычисление.
60. Правило Лопиталя.
61. Монотонность и экстремум функции: достаточные условия.
62. Выпуклость и перегиб графика функции: достаточные условия.
63. Исследование функции и построение графика.
64. Дифференциал первого порядка, свойства.
65. Дифференциалы высшего порядка.
65. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
66. Свойства неопределенного интеграла.
67. Таблица неопределенных интегралов.
68. Вычисление интегралов с помощью свойств и таблицы.
69. Приведение интеграла к самому себе.
70. Вычисление интегралов методом замены переменной и занесения под дифференциал.
71. Интегрирование квадратного трехчлена в знаменателе дроби и под корнем.
72. Метод интегрирования по частям.
73. Интегрирование иррациональных функций: метод рационализации выражения.
74. Понятие определенного интеграла и его свойства. Геометрический смысл определенного интеграла.
75. Формула Ньютона-Лейбница.
76. Методы интегрирования по частям и замены переменной для вычисления определенного интеграла.
77. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
78. Механический смысл определенного интеграла.
79. Основные понятия дифференциальных уравнений.
80. Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
81. Однородные уравнения 1-го порядка.
82. Линейные уравнения 1-го порядка.
83. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
84. Понятие ФМП.
85. Частные производные.
86. Понятие полного дифференциала функции.

Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Уровень сформированности компетенций			
«Минимальный уровень не достигнут» (менее 50 баллов)	«Минимальный уровень» (50-70 баллов)	«Средний уровень» (71-85 баллов)	«Высокий уровень» (86-100 баллов)
<u>Компетенции не сформированы.</u> Знания отсутствуют, умения и навыки не сформированы.	<u>Компетенции сформированы.</u> Сформированы базовые структуры знаний. Умения фрагментарны и носят репродуктивный характер. Демонстрируется низкий уровень самостоятельности практического навыка.	<u>Компетенции сформированы.</u> Знания обширные, системные. Умения носят репродуктивный характер, применяются к решению типовых заданий. Демонстрируется достаточный уровень самостоятельности устойчивого практического навыка.	<u>Компетенции сформированы.</u> Знания твердые, аргументированные, всесторонние. Умения успешно применяются к решению как типовых, так и нестандартных творческих заданий. Демонстрируется высокий уровень самостоятельности, высокая адаптивность практического навыка
Описание критериев оценивания			
Обучающийся демонстрирует: - существенные пробелы в знаниях учебного материала; - допускаются принципиальные ошибки при ответе на основные вопросы, отсутствует знание и понимание основных понятий и категорий; - непонимание сущности дополнительных вопросов в рамках заданий; - отсутствие умения выполнять практические задания, предусмотренные программой дисциплины; - отсутствие готовности (способности) к дискуссии и низкую степень контактности.	Обучающийся демонстрирует: - знания теоретического материала; - неполные ответы на основные вопросы, ошибки в ответе, недостаточное понимание сущности излагаемых вопросов; - неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы; - недостаточное владение литературой, рекомендованной программой дисциплины; - умение без грубых ошибок решать практические задания, которые следует выполнить.	Обучающийся демонстрирует: - знание и понимание основных вопросов контролируемого объема программного материала; - твердые знания теоретического материала. - способность устанавливать и объяснять связь практики и теории, выявлять противоречия, проблемы и тенденции развития; - правильные и конкретные, без грубых ошибок, ответы на поставленные вопросы; - умение решать практические задания, которые следует выполнить;	Обучающийся демонстрирует: - глубокие, всесторонние и аргументированные знания программного материала; - полное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений, точное знание основных понятий в рамках обсуждаемых заданий; - способность устанавливать и объяснять связь практики и теории; - логически последовательные, содержательные, конкретные и исчерпывающие ответы на все задания, а также дополнительные

		- владение основной литературой, рекомендованной программой дисциплины; - наличие собственной обоснованной позиции по обсуждаемым вопросам. Возможны незначительные оговорки и неточности в раскрытии отдельных положений вопросов, присутствует неуверенность в ответах.	вопросы экзаменатора; - умение решать практические задания; - свободное использование в ответах на вопросы материалов рекомендованной основной и дополнительной литературы.
Оценка «неудовлетворительно» / не зачтено	Оценка «удовлетворительно» / «зачтено»	Оценка «хорошо» / «зачтено»	Оценка «отлично» / «зачтено»

Примерные задания для контрольных работ Уравнение линии на плоскости

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя формулу $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1 - \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4$$

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны АВ: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$$2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Для самостоятельного решения:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;1)$ под углом 45° к оси Ox .

Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;3)$

Даны вершины треугольника $A(-1;3)$; $B(3;-2)$ и $C(5;3)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины А на сторону ВС параллельно данной прямой.

Даны вершины треугольника: $A(3;0)$, $B(-5;6)$ и $C(-4;1)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины С.

Даны вершины треугольника: $A(3;5)$, $B(-3;3)$ и $C(5;-8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины С.

Найти угловые коэффициенты прямых и определить, какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$ 1) $4x + 8y + 17 = 0$; 2) $4x - 8y - 11 = 0$; 3)

$$y = -\frac{1}{2}x + 6; 4) y = -2x - 7 5) \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

Даны вершины треугольника $A(3;0)$; $B(-5;6)$ и $C(-4;1)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины С.

Даны точки $A(2;4)$ и $B(-2;6)$. Найти сумму координат середины отрезка АВ

Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;3)$

Определители и матрицы

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти

$A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{matrix} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{matrix}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg} A = 2$$

Для самостоятельного решения:.

Найти алгебраические дополнения элементов 3-го столбца матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вычислить определитель, разложив его по элементам 2-й строки

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$

Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = AB^T$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить матрицу $D = ABC$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 5)$$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

Пример. Найти решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Для самостоятельного решения:

Решить системы методом Гаусса и по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

Векторы

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

$$\text{Т.е. } \vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 +$$

$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \quad \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.}$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4(\text{ед}^2).$$

Для самостоятельного решения:

Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Даны векторы $\vec{a} = (-3; 4; 1)$ и $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Найти скалярное произведение векторов

Даны векторы $\vec{a} = (-2; 3; 4)$ и $\vec{b} = (1; 1; 0)$. Найти векторное произведение векторов

Доказать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.

Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7,3,4), B(1, 0, 6), C(4, 5, -2).

Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 422 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/450038>
2. Минорский Василий Павлович
Сборник задач по высшей математике, учебное пособие Физико-матем.лит-ры, 2010
3. Пахомова, Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий: учебное пособие для вузов / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 110 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-

- 534-08428-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451426>
4. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 340 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01179-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/450619>
5. Высшая математика для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. ЮНИТИ-ДАНА. 2010
- б) Дополнительная литература*
6. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебное пособие для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/456440>
7. Письменный, Дмитрий Трофимович
Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. Айрис-пресс, 2011

в) программное обеспечение, ЭБС, профессиональные базы и Интернет-ресурсы:

- необходимый для обеспечения данной дисциплины комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, а также электронные библиотечные системы, с которыми у СОГУ имеется действующий договор:

№ п/п	Наименование	№ договора(лицензия)	Страна-производитель
1.	Windows 10 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
2.	Windows 7 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
3.	OfficeStandard 2016	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
4.	Система тестирования SunravWEBClass	№468 от 03.12.2013 ИП Сунгатулин Р.Т.(бессрочно)	Россия
5.	Система компьютерной верстки MikTex	Лицензия FSF/Debian (Свободное программное обеспечение) (бессрочно)	
6.	KasperksyEndpoint Security	До 22.01.2024	Россия
7.	Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»	№ 6262 от 09.01.2023 (действителен до 31.12.2023г) с ОАО «Анти-Плагиат»	Россия
8.	Автоматизированная система «Управление –Деканат БРС»	Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611830 от 06.02.2015г.(бессрочно)	СОГУ
9.	Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»	Разработка СОГУ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611829 от 06.02.2015г. (бессрочно)	СОГУ
10.	Планы	№8867, от09.01.2023г. (09.01.2023г. до 31.12.2023г.) ООО ЛММИС	Россия
11.	VSDESK	№ 210406/01 от 06.04.2021г. ИП	Россия

		И,А.Сергеевич Тех.под. 07.04.2022	
12.	«Галактика»	от 14.03.2022г (примерная дата)	Россия
13.	DIRECTUMRX – Система электронного документооборота	ООО Галактика ИТ договор № 120320/Д/А от 14.03.2022(примерная дата)	Россия
14.	Услуги связи (доступ к сети интернет)	ООО Алком № AL-0044 от 01.02.2022г -31.12.2022г	Россия
15.	MOODLE	Бесплатное российское	США (бесплатное российское)
16.	«Галактика РУЗ»	Лицензия бессрочная Тех.сопровождение от 14.03.2022 г	Россия
17.	Личный кабинет студента/сотрудника	Лицензия бессрочная Тех.сопровождение от 14.03.2022 г	Россия
18.	Электронная библиотека диссертации и авторефератов РГБ(ЭБД РГБ)	https://dvs.rsl.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
19.	ЭБС"Университетская библиотека ONLINE"	https://biblioclub.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
20.	ЭБС «Научная электронная библиотека eLibrary.ru»	http://elibrary.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
21.	Универсальная баз данных EastView	https://dlib.eastview.com	США
22.	ЭБС «Консультант студента» Студенческая электронная библиотека по медицинскому и фармацевтическому образованию, а также по естественным и точным наукам в целом.	http://www.studentlibrary.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
23.	ЭБС «Юрайт» - образовательная среда, включающая виртуальный читальный зал учебников и учебных пособий от авторов из ведущих вузов России по всем направлениям и специальностям	www.biblio-online.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
24.	КЭП (домен на Яндексе)	бесплатное	Россия
25.	РусГард	бесплатное	Россия
26.	ViPNet	бесплатное	Россия

Профессиональные базы:

Образовательный портал: математика, кибернетика и программирование	http://www.artspb.com
Единое окно доступа к	http://window.edu.ru/catalog /resources?p_rubr=2.2.74.12

информационным ресурсам. Математика	
Electronic Library of Mathematics – крупнейший репозиторий открытого доступа по математике	https://www.emis.de/ELibM.html
Математический портал. Практические занятия по высшей математике	http://mathportal.net/index.php
Математика, образовательные сайты	https://www.fxyz.ru/образовательные_сайты/математика/
Алгоритмы. Методы. Задачи. Исходники	http://algolist.manual.ru
Сайт для всех, кто интересуется математикой	https://math.ru
Учебно-методический журнал «Математика»	http://mat.1september.ru
Материалы по математике в помощь школьнику и студенту (тесты по математике online)	http://mathtest.ru

10. Материально-техническое оснащение дисциплины

Занятия по дисциплине проводятся в аудиториях, обеспеченных компьютерами, имеющими доступ к сети Интернет, интерактивными досками и мультимедийным оборудованием.

Лицензионное программное обеспечение:

1. Windows 10 Pro for Workstations, (№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г);
2. Office Standard 2016 (№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г);
3. Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат ВУЗ»;

Перечень ПО в свободном доступе:

1. Kaspersky Free;
2. WinRar;
3. Google Chrome;
4. Yandex Browser;
5. OperaBrowser.