

*Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Северо-Осетинский государственный университет  
имени Коста Левановича Хетагурова»*

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **«Математика»**

**Направление 19.03.02 Продукты питания из растительного сырья**

**Профиль «Технология продуктов питания из растительного сырья»**

**Квалификация (степень) выпускника – бакалавр**

Владикавказ 2021

Программа составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению *19.03.02 Продукты питания из растительного сырья*, утвержденным приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 17 августа 2020 г., № 1041, учебным планом подготовки бакалавров по направлению *19.03.02 - Продукты питания из растительного сырья*, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «СОГУ» (протокол № 11 от 29.04.2021 г.).

Составитель: старший преподаватель Галаванова З.Е.

Рабочая программа обсуждена и утверждена на заседании кафедры алгебры и анализа

(протокол от « 23 » апреля 2021 г. № 7 ).

Зав. кафедрой Н.А. Н.А. Джусоева

Одобрена советом факультета химии, биологии и биотехнологии

(протокол от «25» марта 2021 г. № 8/20-21)

Председатель совета факультета Агаева Ф.А. Агаева

*Рабочая программа дисциплины принята в составе основной профессиональной образовательной программы решением ученого совета*  
Протокол №11 от 29.04.2021 г., Утверждена Приказом ректора №106 от 30.04.2021 г.

## 1. Структура и общая трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 часа)

	Очная форма обучения	Заочная форма обучения
Курс	1	
Семестр	1	
Лекции	36	
Практические занятия	54	
Лабораторные занятия		
Консультации		
Итого аудиторных занятий	90	
Самостоятельная работа	18	
Курсовая работа		
Форма контроля		
Экзамен	36	
Общее количество часов	144	

## 2. Цели освоения дисциплины:

- формирование необходимого уровня фундаментальной математической подготовки;
- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования технологических процессов;
- воспитание высокой математической культуры: ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке студентов;
- умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов;
- приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов математики при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных явлений и процессов.

Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже универсальными и общепрофессиональными компетенциями. Они способствуют его социальной мобильности, устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах.

## 3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Математика» относится к дисциплинам Блока 1. Дисциплины (модули). Обязательная часть. **Б1.О.08.**

Для изучения дисциплины необходимы знания и компетенции, полученные обучающимися в рамках школьной программы по математике или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования.

Знания, умения и навыки, полученные в ходе изучения данной дисциплины, будут востребованы студентами на всех этапах обучения при освоении различных дисциплин учебного плана, подготовке рефератов, контрольных, курсовых и выпускных квалификационных работ, в процессе последующей профессиональной деятельности.

:

## 4. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины обучающийся должен обладать следующими

компетенциями (результатами освоения образовательной программы):

:

Коды компетенций	Содержание компетенций
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
ОПК-2	Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности

Взаимосвязь планируемых результатов обучения по дисциплине с формируемыми компетенциями ОПОП

Компетенции		Планируемые результаты обучения, соответствующие формируемым компетенциям ОПОП		
Код	Формулировка	Знать:	Уметь	Владеть:
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<p>фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для обработки информации и анализа данных</p> <p>механизмы и методики поиска, анализа и синтеза информации, включающие системный подход для решения поставленных задач.</p>	<p>анализировать задачу и её базовые составляющие в соответствии с заданными требованиями</p> <p>применять системный подход для решения поставленных задач</p> <p>рассматривать возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки</p>	<p>навыками сбора, обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования;</p> <p>способностью осуществлять поиск информации, интерпретировать и ранжировать её для решения поставленной задачи по различным типам запросов.</p>
ОПК-2	Способен применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности	фундаментальные разделы математики в необходимом объеме для обработки информации и анализа данных в области технологии продуктов питания из растительного сырья	применять фундаментальные разделы математики для оценки состояния и прогноза развития технологических процессов и явлений;	методами теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности;

		этапы решения поставленной задачи, выделяя ее основные составляющие	систематизировать результаты исследований	
--	--	---	---	--

При проведении учебных занятий обеспечивается развитие у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств (включая при необходимости проведение интерактивных лекций, групповых дискуссий, ролевых игр, тренингов, анализ ситуаций и имитационных моделей, преподавание дисциплин (модулей) в форме курсов, составленных на основе результатов научных исследований, в том числе с учетом региональных особенностей профессиональной деятельности выпускников и потребностей работодателей).

## 5. Содержание и учебно-методическая карта дисциплины

*Таблица 5.1*

Номер недели	Наименование тем (вопросов), изучаемых по данной дисциплине	Занятия		Самостоятельная работа Студентов		Формы контроля	Количество баллов		Литература
		л	пр	Содержание	Часы		min	max	
1	<b>Прямая линия на плоскости</b> Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Уравнение линии. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой.	2	2	Координаты точки на прямой и на плоскости. Площадь треугольника и многоугольника.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	2	[3],[4], [7]
2	<b>Прямая линия на плоскости</b> Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках.	2	4	Нормальное уравнение прямой Точка пересечения двух прямых.	1	самостоятельная работа	0	2	[3],[4], [7]
3	<b>Кривые второго порядка</b> Окружность. Эллипс. Гипербола, Парабола.	2	2	Поверхности второго порядка: канонические уравнения, характеристики.	1	мини опрос Самостоятельная работа	0	3	[3],[4], [7]
4	<b>Векторы на плоскости и в пространстве.</b> Векторы на плоскости и в пространстве. Длина и направление вектора. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов.	2	4	Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов. Проекция вектора на заданное направление	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	3	[3],[4], [7]
5	<b>Определители и матрицы</b> Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Определители квадратных матриц. Свойства определителей. Обратная матрица. Ранг матрицы.	2	2	Обратная матрица. Ранг матрицы.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	3	[3],[4], [7]
6	<b>Системы линейных алгебраических уравнений</b> Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера, методом обратной матрицы. Метод Гаусса.	2	4	Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера, методом обратной матрицы. Метод Гаусса.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе, самостоятельная работа	0	3	[3],[4], [7]

<b>7</b>	<b>Функция</b> Множества. Абсолютная величина действительного числа. Понятие функции. Способы задания функции. Понятие неявной, обратной и сложной функций. Классификация функции.	2	2	Графики основных элементарных функций	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	<b>0</b>	<b>3</b>	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>8</b>	<b>Пределы</b> Предел числовой последовательности. Предел функции в бесконечности и в точке. Односторонние пределы Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Основные теоремы о пределах..	2	4	Предел функции в бесконечности и в точке. Односторонние пределы	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	<b>0</b>	<b>3</b>	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>9</b>	<b>Пределы и непрерывность</b> Первый замечательный предел Второй замечательный предел. Непрерывность функции. Некоторые свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.  <b>1-я рубежная аттестационная работа</b>	2	2	Точки разрыва функции. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.	1	самостоятельная работа	<b>0</b>	<b>25</b>	[1], [2], [3], [4], [8]
	<b>Текущий контроль</b>						<b>0</b>	<b>25</b>	
	<b>ИТОГО за 1 модуль</b>						<b>0</b>	<b>50</b>	
	<b>2 модуль</b>								
<b>10</b>	<b>Производная.</b> Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования.	2	4	Производная неявной, обратной и сложной функций. Производные высших порядков.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	<b>0</b>	<b>2</b>	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>11</b>	<b>Производная.</b> Производная неявной, обратной и сложной функций. Производные высших порядков. Правило Лопиталя.	2	2		1	мини-опрос	<b>0</b>	<b>2</b>	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>12</b>	<b>Приложения производной</b> Условие постоянства, возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты	2	4	Правило Лопиталя. Полное исследование функции.	1	мини-опрос вопросы в рубежной контрольной работе, самостоятельная работа	<b>0</b>	<b>3</b>	[1], [2], [3], [4], [8]

	кривой. Полное исследование функции.								
<b>13</b>	<b>Неопределенный интеграл:</b> Дифференциал функции. Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Геометрический смысл. Свойства неопределенного интеграла.	2	2	Интегралы основных элементарных функций. Свойства неопределенного интеграла.	1	мини-опрос самостоятельная работа	0	3	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>14</b>	<b>Неопределенный интеграл:</b> Интегралы основных элементарных функций. Способы интегрирования.	2	4	Интегрирование некоторых тригонометрических функций	1	мини-опрос	0	3	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>15</b>	<b>Определенный интеграл</b> Задача о площади криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	2	2	Свойства определенного интеграла. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе самостоятельная работа	0	3	[1], [2], [3], [4], [8]
<b>16</b>	Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности.	2	4	Формулы комбинаторики. Уравнение Бернулли.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	3	[4], [5], [6]
<b>17</b>	Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула Байеса, формула полной вероятности.	2	2	Мода, медиана, размах вариационного ряда. Выборка.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	3	[4], [5], [6]
<b>18</b>	Дискретные случайные величины. Основные законы распределения.	2	4	Непрерывные случайные величины, основные законы распределения.	1	мини опрос, вопросы в рубежной контрольной работе	0	3	[4], [5], [6]
	<b>2 рубежная аттестационная работа</b>							<b>25</b>	
	<b>Текущий контроль</b>						0	<b>25</b>	
	<b>ИТОГО за 2 модуль</b>						0	<b>50</b>	
	<b>ИТОГО за 1 семестр</b>	<b>36</b>	<b>54</b>		<b>18</b>		0	<b>100</b>	

**Примечания:**

1. Все виды учебной работы могут проводиться дистанционно на основании локальных нормативных актов.

2. В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по индивидуальной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины может осуществляться через индивидуальные консультации преподавателя очно, в часы консультаций, по электронной почте, а также с использованием Webex, платформы дистанционного обучения Moodle, личный кабинет студента на сайте СОГУ, других элементов ЭИОС СОГУ.

## **6. Образовательные технологии.**

Для достижения планируемых результатов освоения дисциплины, используются различные образовательные технологии:

- традиционные лекции и практические (семинарские) занятия с использованием современных интерактивных технологий;
- лекция-диалог – содержание подается через серию вопросов, на которые студент должен отвечать непосредственно в ходе лекции;
- доклад (реферат) – студент готовит краткое сообщение по вопросу темы, оформляет работу в соответствии с требованиями и сдает ее преподавателю
- онлайн-занятие – разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или через Интернет в режиме реального времени. Каждый из участников находится у своего компьютера (средства связи), а связь между ними поддерживается через Интернет посредством загружаемого приложения, установленного на компьютере каждого участника (Zoom, Meet, Skype, Webex и др.);
- видеоконференция – сеанс видеоконференцсвязи (ВКС) – это технология интерактивного взаимодействия двух и более участников образовательного процесса для обмена информацией в реальном режиме времени.

Технология электронного обучения - реализуется при помощи электронной образовательной среды СОГУ (при использовании ресурсов ЭБС), в ходе проведения автоматизированного тестирования, видеоконференций и т.д..

## **7. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.**

Самостоятельная работа обучающихся является одним из видов учебных занятий. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- формирования умений использовать нормативную, правовую справочную документацию и специальную литературу;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется на протяжении изучения всей дисциплины в соответствии с утвержденной в учебном плане трудоемкостью и состоит из:

- изучения теоретического материала для подготовки к практическим занятиям;
- работы студентов с лекционными материалами, поиска и анализа литературы и электронных источников информации по заданной теме;
- выполнения заданий для самостоятельной работы в ЭИОС СОГУ;
- подготовки к промежуточным контрольным работам и к итоговым тестам;
- подготовки к экзамену.

Темы и формы внеаудиторной самостоятельной работы, ее трудоёмкость содержатся в разделе 5, табл. 5.1.

## **Методические указания по проведению практических занятий**

Практические занятия по дисциплине «Математика» проводятся в течение одного семестра по три часа в неделю.

В начале практического занятия следует обратить внимание на теоретические вопросы по теме занятия. Первоначально идет изложение теоретического материала темы занятия. Затем в ряде вопросов преподавателя следует сконцентрировать внимание на основных идеях темы занятия. Вопросы должны включать в себя различные вариации элементарных ситуаций, отображающих основные идеи темы занятия в их взаимной взаимосвязи. Задаваемые вопросы-задачи должны быть короткими и максимально проявлять в студентах их сообразительность.

После предварительной части следует начинать решать задачи, имеющих более длинные сценарии взаимодействия основных идей темы занятия. При этом следует избегать трудоемких задач, включающих освоение незначительного числа приемов. В процессе решения задачи следует всегда увязывать шаги алгоритма решения задачи с теоретическими основами изучаемого алгоритма и добиваться понимания механизма действия изучаемого алгоритма.

### **Различают фронтальный, индивидуальный и комбинированный опрос.**

**Фронтальный опрос** проводится в форме беседы преподавателя с группой.

Он органически сочетается с повторением пройденного, являясь средством для закрепления знаний и умений. Его достоинство в том, что на активную умственную работу можно вовлечь всех студентов группы. Для этого вопросы должны допускать краткую форму ответа, быть лаконичными, логически взаимосвязанными друг с другом. С помощью фронтального опроса преподаватель имеет возможность проверить выполнение студентами домашнего задания, выяснить готовность группы к изучению нового материала.

**Индивидуальный опрос** предполагает обстоятельные, связные ответы студентов на вопрос, относящийся к изучаемому учебному материалу, поэтому он служит важным учебным средством развития речи, памяти, мышления студентов. Чтобы сделать такую проверку более глубокой, необходимо ставить перед студентами вопросы, требующие развернутого ответа.

Вопросы для индивидуального опроса должны быть четкими, ясными, конкретными, емкими, иметь прикладной характер, охватывать основной, ранее пройденный материал программы. Их содержание должно стимулировать студентов логически мыслить, сравнивать, анализировать, доказывать, подбирать убедительные примеры, устанавливать причинно-следственные связи, делать обоснованные выводы и этим способствовать объективному выявлению знаний студентов.

Вопросы обычно задают всей группе и после небольшой паузы, необходимой для того, чтобы студенты поняли его и приготовились к ответу, вызывают для ответа конкретного студента.

**Письменная проверка** наряду с устной является важнейшим методом контроля знаний, умений и навыков студентов. Однородность работ, выполняемых студентами, позволяет предъявлять ко всем одинаковые требования, попытаться объективности оценки результатов обучения. Применение этого метода дает возможность в наиболее короткий срок одновременно проверить усвоение учебного материала всеми студентами группы, определить направления для индивидуальной работы с каждым.

Письменная проверка используется во всех видах контроля и осуществляется как в аудиторной, так и во внеаудиторной работе.

## **Методические рекомендации по написанию рефератов (докладов)**

Реферат (доклад)— письменная работа по определенной научной проблеме, краткое изложение содержания научного труда или научной проблемы. Он является действенной формой самостоятельного исследования научных проблем на основе изучения текстов, специальной литературы, а также на основе личных наблюдений, исследований и практического опыта. Реферат помогает выработать навыки и приемы самостоятельного научного поиска, грамотного и логического изложения избранной проблемы и способствует приобщению студентов к научной деятельности.

Последовательность работы:

1. Выбор темы исследования. Тема реферата выбирается студентом на основе его научного интереса. Также помощь в выборе темы может оказать преподаватель.

2. Планирование исследования. Включает составление календарного плана научного исследования и плана предполагаемого реферата. Календарный план исследования включает следующие элементы: выбор и формулирование проблемы, разработка плана исследования и предварительного плана реферата; сбор и изучение исходного материала, поиск литературы; анализ собранного материала, теоретическая разработка проблемы; сообщение о предварительных результатах исследования; литературное оформление исследовательской проблемы; обсуждение работы (на семинаре и т. п.).

План реферата характеризует его содержание и структуру. Он должен включать в себя: введение, где обосновывается актуальность проблемы, ставятся цель и задачи исследования; основная часть, в которой раскрывается содержание проблемы; заключение, где обобщаются выводы по теме и даются практические рекомендации.

3. Поиск и изучение литературы. Для выявления необходимой литературы следует обратиться в библиотеку или к преподавателю. Подбранную литературу следует зафиксировать согласно ГОСТ по библиографическому описанию произведений печати.

Для разработки реферата достаточно изучение 4-5 важнейших статей по избранной проблеме.

4. Обработка материала. При обработке полученного материала автор должен: систематизировать его по разделам; выдвинуть и обосновать свои гипотезы; определить свою позицию, точку зрения по рассматриваемой проблеме; уточнить объем и содержание понятий, которыми приходится оперировать при разработке темы; сформулировать определения и основные выводы, характеризующие результаты исследования; окончательно уточнить структуру реферата.

5. Оформление реферата. Реферат выполняется в соответствии с требованиями стандартов, разработанных для данного вида документов. Работа должна быть выполнена на белой бумаге стандартного листа А4. Текст должен быть отпечатан на компьютере в текстовом редакторе Microsoft Word и отвечать следующим требованиям: параметры полей страниц должны быть в пределах: верхнее и нижнее – по 20 мм, правое – 10 мм, левое – 30 мм, шрифт – Times New Roman, размер шрифта – 14, межстрочный интервал – полуторный. Лента принтера – только чёрного цвета. Нумерация страниц в реферате должна быть сквозной, начиная с третьей страницы. Номер проставляется арабскими цифрами вверху каждой страницы справа.

При изложении материала необходимо придерживаться принятого плана.

Библиографический список составляется на основе источников, которые были просмотрены и изучены студентом при написании реферата. Данный список отражает

самостоятельную творческую работу студента, что позволяет судить о степени его подготовки и углублении в выбранную тематику.

### **Методические рекомендации по использованию информационно-коммуникативных технологий обучения**

Для изучения лекционного материала дисциплины применяются аудиовизуальные (мультимедийные) технологии, которые не отрицают традиционные, проверенные временем методы преподавания, но, при этом, они повышают наглядность, информативность, оперативность в подаче информации, позволяют экономить время занятий.

Каждое семинарское занятие имеет свою особую форму проведения, свою методологическую специфику, что позволяет развивать у студентов различные как общекультурные, так и профессиональные компетенции. Постановка проблемы, разбор актуальных конкретных и гипотетических ситуаций, создание атмосферы диалога между преподавателем и группой позволяет работать индивидуально и в малых группах, коллективно обсуждать определенный тематический материал, а также инициировать самостоятельную работу студентов. При осмыслении содержания вопросов практических занятий преследуется цель соблюдать преемственность в профессиональном и в творческом развитии студентов.

Контроль самостоятельной работы студентов призван сделать процесс обучения более целостным и органичным. Его задача не оставить без внимания даже, на первый взгляд, малозначительные вопросы.

Компьютерное тестирование позволяет осуществлять итоговый контроль знаний студентов. Тестовый материал включает в себя содержание вопросов по каждому из обозначенных программой разделов.

Каждый вопрос предполагает несколько вариантов ответов, среди которых имеются абсолютно неверный, правильный и в большей или меньшей степени раскрывающий сущность вопроса. В процессе компьютерного тестирования задача студентов определяется как выбор правильного ответа из многообразия вариантов. В тестовых заданиях есть вопросы на соответствие. В процессе компьютерного тестирования, задача студента определяется как выбор правильного ответа из многообразия вариантов.

Вопросы и темы, отводимые на выполнение самостоятельной работы по дисциплине, а также критерии оценивания по каждому виду работы содержатся в разделе 8 РПД.

### **8. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

Общим средством контроля является введенная в университете балльно-рейтинговая система оценки успеваемости студентов специалитета и направлений бакалавриата.

#### **К оценочным средствам текущего контроля относятся:**

**Текущий контроль** – это непрерывно осуществляемый мониторинг уровня усвоения знаний и формирования умений и навыков в течение семестра или учебного года. Текущий контроль знаний, умений и навыков студентов осуществляется в ходе учебных (аудиторных) занятий, проводимых по расписанию. Формами текущего контроля выступают опросы на лекционных и практических занятиях, а также короткие (до 15 мин.) контрольные задания, выполняемые студентами в начале лекции с целью проверки наличия знаний, необходимых для усвоения нового материала или в конце

лекции для выяснения степени усвоения изложенного материала, а также на практических занятиях.

**Рубежный контроль** осуществляется по более или менее самостоятельным разделам – учебным модулям курса и проводится по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра проводится два таких контрольных мероприятия по графику.

**К оценочным средствам текущего контроля относятся:**

### **1) Выполнение заданий на практических занятиях – 8 баллов**

Критерии оценки:

8 баллов – студент дает полное развернутое решение выполняемого задания, демонстрирует знание основных формул по изучаемой теме, приходит к самостоятельным аргументированным выводам.

6-7 баллов – студент дает полное развернутое решение выполняемого задания, демонстрирует знание основных формул по изучаемой теме, но допускает ошибки вычислительного характера.

5-4 баллов – студент дает развернутое решение выполняемого задания после подсказки аудитории, студент неполно владеет теоретическим материалом, допускает отдельные неточности, знает различные точки зрения по обсуждаемой проблеме, но возникают трудности с их анализом, умеет излагать собственную позицию, но не все выводы носят доказательный характер.

3-2 балла – студент дает развернутое решение выполняемого задания после подсказки аудитории, студент неполно владеет теоретическим материалом, допускает отдельные неточности.

1 балл – студент дает решение выполняемого задания по подсказкам аудитории, студент не владеет теоретическим материалом.

0 баллов – студент отказывается выходить к доске

### **2) Выполнение домашних заданий – 4 балла**

Домашняя (внеаудиторная) подготовка включает в себя ответы на устные вопросы по пройденному теоретическому материалу и выполнение практических заданий. Оценивается до 3 баллов.

Критерии оценки домашней (внеаудиторной) подготовки.

4 балла (максимальная оценка) - ответ отличается последовательностью, логикой изложения, легко воспринимается аудиторией, при ответе на вопрос отвечающий демонстрирует глубину владения представленным материалом, ответы формулируются аргументировано, обосновывается решение задачи. Студент в полном объеме выполнил домашнее задание.

2-3 балла – устный ответ отличается последовательностью, логикой изложения, но обоснование сделанных выводов не достаточно аргументировано, неполно раскрыто содержание проблемы, решение задачи неполное.

1 балл – отвечающий передает содержание проблемы, но не демонстрирует знание точных формулировок, выступление воспринимается аудиторией сложно, ответы на вопросы поверхностные, либо вызывают затруднение, нет решения задач.

0 баллов - студент не выполнил домашнее задание.

### **3) Выполнение самостоятельных работ - 8 баллов**

Самостоятельная работа как вид деятельности студента очень многогранна. В качестве форм работы для изучения курса «Математика и математические методы в биологии» предлагаются следующие ее разновидности:

- работа с учебной и научной литературой;
- выполнение аудиторной, модульной контрольной работ;
- написание рефератов ( докладов);
- самостоятельной работы на дистанционной площадке Moodle
- подготовка к тестированию.

Целью самостоятельной работы для студентов является более глубокое знакомство с ключевыми теоретическими вопросами, изучаемыми на лекциях.

Задачи самостоятельной работы:

- обретение навыков самостоятельной научно-исследовательской работы на основе анализа текстов источников и применения различных методов исследования;
- выработка умения самостоятельно и критически подходить к изучаемому материалу;
- формирование общекультурных профессиональных компетенций курса.

### **Темы рефератов (докладов) и критерии их оценивания**

**Темы рефератов:**

1. Числа Фибоначчи. Золотое сечение.
2. Удивительное число  $\pi$ .
3. Магические квадраты.
4. Знаменитые задачи древности.
5. Интуиция и математика.
6. Развитие понятия функции
7. Элементарные функции и преобразование графиков.
8. Основные этапы развития представлений о действительном положительном числе
9. Связь математики с другими науками

Критерии оценивания:

Максимальное количество баллов составляет 5 баллов, из них:

5 баллов - оформлен в соответствии с требованиями, содержание реферата полностью раскрывает тему, в работе имеются примеры исследования, ответы даны на все дополнительные вопросы;

3 - 4 балла – оформлен в соответствии с требованиями, содержание реферата полностью раскрыто, частично представлены примеры исследования, ответы даны не на все дополнительные вопросы;

0 - 2 балла – оформлен в соответствии с требованиями, содержание реферата не полностью раскрыто, отсутствуют примеры исследования, нет ответов на дополнительные вопросы.

<b>Форма контроля</b>	<b>Мин. кол-во баллов</b>	<b>Макс. кол-во баллов</b>
<b>Текущая оценка</b> студента в течение 1-9 недели состоит из:	<b>0</b>	<b>25</b>
• <b>Выполнения заданий на практических занятиях</b>		8
• <b>Выполнения домашних заданий</b>		4

• <i>Самостоятельных работ</i>		8
• <i>Защита рефератов</i>		5
<i>1-я рубежная контрольная работа</i>		<b>25</b>
<b>Итого за 1 модуль</b>	<b>0</b>	<b>50</b>
<i>Текущая оценка студента в течение 10-18 недели состоит из:</i>	<b>0</b>	<b>25</b>
• <i>Выполнения заданий на практических занятиях</i>		8
• <i>Выполнения домашних заданий</i>		4
• <i>Самостоятельных работ</i>		8
• <i>Защита рефератов</i>		5
<i>2-я рубежная контрольная работа</i>		<b>25</b>
<b>Итого за 2 модуль</b>	<b>0</b>	<b>50</b>
<b>Итого за семестр</b>	<b>0</b>	<b>100</b>

Учебным планом по данной дисциплине предусмотрен экзамен в первом семестре.

### Методика формирования результирующей оценки

В ходе текущего контроля студенты могут набрать 0-100 баллов:

**1–я рубежная аттестация - максимально 50 баллов; из них:**

От 0 до 25 баллов – тестирование в центре тестирования СОГУ ( $P_1$ );

От 0 до 25 баллов – текущая работа студента ( $T_1$ )

**2-я рубежная аттестация – максимально 50 баллов; из них:**

От 0 до 25 баллов – тестирование в центре тестирования СОГУ ( $P_2$ );

От 0 до 25 баллов – текущая работа студента ( $T_2$ )

За устный ответ на экзамене студент получает 0-50 баллов.

Студенты, получившие в ходе текущего и рубежного контроля 56-100 баллов автоматически получают «Экзамен».

Результирующая оценка складывается по соответствующей БРС формуле .

$$(T_1 + T_2) + 0,5 \cdot (P_1 + P_2 + \Xi)$$

### Шкала итоговой академической успеваемости студентов по дисциплине

Система оценок СОГУ		
Сумма баллов	Название	Числовой эквивалент
86 - 100	отлично	5
71-85	хорошо	4
56-70	удовлетворительно	3

### Оценивание ответа студента на экзамене

<i>Характеристика ответа</i>	<i>баллы</i>
Студент показал исчерпывающие глубокие знания всего материала программы, полное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. При этом должны быть получены логически последовательные, содержательные, полные, правильные и конкретные ответы на все вопросы экзаменационного билета	46-50

Даны последовательные, правильные, конкретные ответы на поставленные вопросы. Ответ изложен литературным языком в терминах науки. Могут быть допущены недочеты в определении понятий, исправленные студентом самостоятельно в процессе ответа.	41-45
Дан полный, развернутый ответ на поставленный вопрос, показано умение выделить существенные и несущественные признаки, причинно-следственные связи. Ответ четко структурирован, логичен, изложен в терминах науки. Однако допущены незначительные ошибки или недочеты, исправленные студентом с помощью «наводящих» вопросов преподавателя.	36-40
Студент показал недостаточно полное знание и понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений отдельных вопросов программного материала. В основном правильные и конкретные, без грубых ошибок ответы на поставленные вопросы; при ответах на отдельные вопросы имеют место незначительные неточности в раскрытии рассматриваемых процессов и явлений.	31-35
Дан недостаточно полный и недостаточно развернутый ответ. Студент не способен самостоятельно выделить существенные и несущественные признаки и причинно-следственные связи. Студент может конкретизировать обобщенные знания, доказав на примерах их основные положения только с помощью преподавателя. Речевое оформление требует поправок, коррекции.	26-30
Дан неполный ответ, логика и последовательность изложения имеют существенные нарушения. Допущены грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, теорий, явлений, вследствие непонимания студентом их существенных и несущественных признаков и связей. В ответе отсутствуют выводы. Умение раскрыть конкретные проявления обобщенных знаний не показано. Речевое оформление требует поправок, коррекции.	21-25
Дан неполный ответ, представляющий собой разрозненные знания по теме вопроса с существенными ошибками в определениях. Присутствуют фрагментарность, нелогичность изложения. Студент не осознает связь данного понятия, теории, явления с другими объектами дисциплины. Отсутствуют выводы, конкретизация и доказательность изложения. Речь неграмотная. Дополнительные и уточняющие вопросы преподавателя не приводят к коррекции ответа студента не только на поставленный вопрос, но и на другие вопросы дисциплины.	1-20
Не получены ответы по базовым вопросам дисциплины	0

**Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания**

<b>Уровень сформированности компетенций</b>			
<i>«Минимальный уровень» (менее 55 баллов) Компетенции не сформированы.</i>	<i>«Минимальный уровень» (56-70 баллов) Компетенции сформированы.</i>	<i>«Средний уровень» (71-85 баллов) Компетенции сформированы.</i>	<i>«Высокий уровень» (86-100 баллов) Компетенции сформированы.</i>
Знания отсутствуют, умения и навыки не сформированы.	Сформированы базовые структуры знаний.  Умения фрагментарны и носят репродуктивный	Знания обширные, системные.  Умения носят репродуктивный характер,	Знания твердые, аргументированные, всесторонние.  Умения успешно

	<p>характер.</p> <p>Демонстрируется низкий уровень самостоятельности практического навыка.</p>	<p>применяются к решению типовых заданий.</p> <p>Демонстрируется достаточный уровень самостоятельности устойчивого практического навыка.</p>	<p>применяются к решению как типовых, так и нестандартных творческих заданий.</p> <p>Демонстрируется высокий уровень самостоятельности, высокая адаптивность практического навыка</p>
Описание критериев оценивания			
<p><i>Обучающийся демонстрирует:</i></p> <p>существенные пробелы в знаниях учебного материала;</p> <p>допускаются принципиальные ошибки при ответе на основные вопросы билета, отсутствует знание и понимание основных понятий и категорий;</p> <p>непонимание сущности дополнительных вопросов в рамках заданий билета;</p> <p>отсутствие умения выполнять практические задания, предусмотренные программой дисциплины;</p> <p>отсутствие готовности (способности) к дискуссии и</p>	<p><i>Обучающийся демонстрирует:</i></p> <p>знания теоретического материала;</p> <p>неполные ответы на основные вопросы, ошибки в ответе, недостаточное понимание сущности излагаемых вопросов;</p> <p>неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы;</p> <p>недостаточное владение литературой, рекомендованной программой дисциплины;</p> <p>умение без грубых ошибок решать практические задания, которые следует выполнить.</p>	<p><i>Обучающийся демонстрирует:</i></p> <p>знание и понимание основных вопросов контролируемого объема программного материала;</p> <p>твердые знания теоретического материала.</p> <p>способность устанавливать и объяснять связь практики и теории, выявлять противоречия, проблемы и тенденции развития;</p> <p>правильные и конкретные, без грубых ошибок, ответы на поставленные вопросы;</p> <p>умение решать практические задания, которые следует выполнить;</p> <p>владение основной литературой,</p>	<p><i>Обучающийся демонстрирует:</i></p> <p>-</p> <p>глубокие, всесторонние и аргументированные знания программного материала;</p> <p>полное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений, точное знание основных понятий в рамках обсуждаемых заданий;</p> <p>способность устанавливать и объяснять связь практики и теории;</p> <p>логически последовательные, содержательные, конкретные и исчерпывающие ответы на все</p>

низкую степень контактности.		рекомендованной программой дисциплины;  наличие собственной обоснованной позиции по обсуждаемым вопросам.  возможны незначительные оговорки и неточности в раскрытии отдельных положений вопросов билета, присутствует неуверенность в ответах на	задания билета, а также дополнительные вопросы экзаменатора;  умение решать практические задания;  свободное использование в ответах на вопросы материалов рекомендованно й основной и дополнительной литературы.
Оценка «неудовлетворител ьно» /незачтено	Оценка «удовлетворительно» / «зачтено»	Оценка «хорошо» / «зачтено»	Оценка «отлично» / «зачтено»

#### Вопросы к экзамену.

1. Расстояние между двумя точками.
2. Уравнение линии. Некоторые элементарные задачи.
3. Угловой коэффициент прямой.
4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Общее уравнение прямой.
6. Угол между двумя прямыми.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
9. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
10. Основные сведения о матрицах.
11. Операции над матрицами.
12. Определители квадратных матриц.
13. Свойства определителей.
14. Системы линейных уравнений. Метод обратной матрицы. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
15. Понятие множества. Пересечение, объединение, разность.
16. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки. .
17. Понятие функции. Способы задания функции.
18. Понятие неявной, обратной и сложной функций.
19. Предел числовой последовательности.
20. Предел функции в бесконечности и в точке. Односторонние пределы.
21. Бесконечно малые величины. Бесконечно большие величины.
22. Основные теоремы о пределах.
23. Два замечательных предела.
24. Непрерывность функции. Некоторые свойства непрерывных функций.
25. Точки разрыва функции.
26. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.
27. Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования.

28. Производная неявной, обратной и сложной функций.
29. Условие постоянства, возрастания и убывания функции.
30. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.
31. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
32. Общая схема исследования функции и построение ее графика.
33. Первообразная функции. Определение неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
34. Методы интегрирования.
35. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл.
36. Основные свойства определенного интеграла.
37. Формула Ньютона-Лейбница. Метод интегрирования подстановкой и метод интегрирования по частям для определенного интеграла.
38. Некоторые приложения определенного интеграла.
39. Классическое и геометрическое определение вероятности
40. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности, формула Байеса.
41. Случайные величины, способы их задания и числовые характеристики.
42. Дискретные случайные величины.
43. Основные законы распределения.

### Примерные задания для контрольных работ

#### Уравнение линии на плоскости

**Пример.** Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя формулу  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ , получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

**Пример.** Задано общее уравнение прямой  $x - y + 1 = 0$ . Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1 - \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

**Пример.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид:  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ , где  $x_1 = y_1 = 0$ ;  $x_2 = -2$ ;  $y_2 = -3$ .

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{-3 - 0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

**Пример.** Определить угол между прямыми:  $y = -3x + 7$ ;  $y = 2x + 1$ .

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4$$

**Пример.** Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB:  $\frac{x - 0}{6 - 0} = \frac{y - 1}{5 - 1}; \quad \frac{x}{6} = \frac{y - 1}{4}; \quad 4x = 6y - 6;$

$$2x - 3y + 3 = 0; \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид:  $Ax + By + C = 0$  или  $y = kx + b$ .

$k = -\frac{3}{2}$ . Тогда  $y = -\frac{3}{2}x + b$ . Т.к. высота проходит через точку С, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:  $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$ , откуда  $b = 17$ .

Итого:  $y = -\frac{3}{2}x + 17$ .

Ответ:  $3x + 2y - 34 = 0$ .

**Для самостоятельного решения:**

Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(5;1)$  под углом  $45^\circ$  к оси  $Ox$ .

Даны вершины треугольника:  $A(3;0)$ ,  $B(-5;6)$  и  $C(-4;1)$ . Определить длину медианы, проведенной из вершины С.

Найти угловые коэффициенты прямых и определить, какие из данных прямых перпендикулярны прямой  $2x - y + 3 = 0$  1)  $4x + 8y + 17 = 0$ ; 2)  $4x - 8y - 11 = 0$ ;

3)  $y = -\frac{1}{2}x + 6$ ; 4)  $y = -2x - 7$  5)  $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

Даны вершины треугольника  $A(3;0)$ ;  $B(-5;6)$  и  $C(-4;1)$ . Составить уравнение высоты, опущенной из вершины С.

### Кривые 2-го порядка

**Пример.** Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4x + 2,5y - 2 &= 0 \\x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2,5y + 25/16 - 25/16 - 2 &= 0 \\(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 &= 0 \\(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 &= 121/16\end{aligned}$$

Отсюда находим  $O(2; -5/4)$ ;  $R = 11/4$ .

**Пример.** Составить уравнение эллипса, если его фокусы  $F_1(0; 0)$ ,  $F_2(1; 1)$ , большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Расстояние между фокусами:

$$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}, \text{ таким образом, } a^2 - b^2 = c^2 = 1/2$$

по условию  $2a = 2$ , следовательно  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$ .

Итого:  $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1$ .

**Пример.** Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Находим фокусное расстояние  $c^2 = 25 - 9 = 16$ .

Для гиперболы:  $c^2 = a^2 + b^2 = 16$ ,  $e = c/a = 2$ ;  $c = 2a$ ;  $c^2 = 4a^2$ ;  $a^2 = 4$ ;  
 $b^2 = 16 - 4 = 12$ .

Итого:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  - искомое уравнение гиперболы.

**Пример.** На параболе  $y^2 = 8x$  найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Из уравнения параболы получаем, что  $p = 4$ .

$r = x + p/2 = 4$ ; следовательно:

$x = 2$ ;  $y^2 = 16$ ;  $y = \pm 4$ . Искомые точки:  $M_1(2; 4)$ ,  $M_2(2; -4)$ .

**Для самостоятельного решения:**

Определить полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса  $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки  $A(2;1)$  и  $B(-4; \sqrt{7})$

Найти центр и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 15 = 0$

Составить каноническое уравнение эллипса  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ . Найти эксцентриситет эллипса.

Найти расстояние между фокусами гиперболы  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

Найти асимптоты гиперболы, заданной уравнением  $4x^2 - 9y^2 = 36$

### Определители и матрицы

**Пример.** Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  и число  $\alpha = 2$ .

Найти  $A^T B + \alpha C$ .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

**Пример.** Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  и  $B = (2 \ 4 \ 1)$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

**Пример.** Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

**Пример.** Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , найти обратную  $A^{-1}$ .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{matrix} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{matrix}$$

Таким образом,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

**Пример.** Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Rg}A = 2$$

**Для самостоятельного решения:.**

Найти алгебраические дополнения элементов 3-го столбца матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить ранг матрицы.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вычислить определитель, разложив его по элементам 2-й строки

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Найти матрицу, обратную данной  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найти матрицу  $C=AB^T$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,

Вычислить матрицу  $D=ABC$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 5)$$

### Решение систем линейных уравнений

**Пример.** Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу  $A^{-1}$ .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{-1} &= \frac{5}{-30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{-30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{-30}; \\ a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{-30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{-30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{-30}; \\ a_{31}^{-1} &= \frac{5}{-30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{-30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{-30}; \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы:  $x=1$ ;  $y=2$ ;  $z=3$ .

**Пример.** Найти решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + (2-12) - (3-8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28-48) - (42-32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28-48) - (16-56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32-42) + (16-56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

**Пример.** Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

**Для самостоятельного решения:**

Решить системы методом Гаусса, по формулам Крамера и методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

### Векторы

**Пример.** Найти  $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

**Пример.** Найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ .

$$\text{Т.е. } \vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

**Пример.** Найти скалярное произведение векторов  $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$  и  $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $|\vec{c}| = 3$ ,  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$ .

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) =$$

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 +$$

$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

**Пример.** Найти векторное произведение векторов  $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ .

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \quad \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

**Пример.** Доказать, что векторы  $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$  и  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они}$$

компланарны.

**Пример.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} + 3\vec{b}$ ;  $3\vec{a} + \vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ;  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$ .

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

**Для самостоятельного решения:**

Найти длину вектора  $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Даны векторы  $\vec{a} = (-3; 4; 1)$  и  $\vec{b} = (1; 1; 1)$ . Найти скалярное произведение векторов

Даны векторы  $\vec{a} = (-2; 3; 4)$  и  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ . Найти векторное произведение векторов

Доказать, что векторы  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$  и  $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$  компланарны.

Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7, 3, 4), B(1, 0, 6), C(4, 5, -2).

Найти угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

### Предел и непрерывность функции

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$ .

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e};$$

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$ .

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0+1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ .

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x\right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

**Пример:** Найти предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$ .

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}; - \text{ получили неопределенность.}$$

Применяем правило Лопиталья еще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g''(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

**Для самостоятельного решения**

Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5 - 2x - 2\sqrt{x^4 + 1}}$  :

Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^4 - 1}}{x^2 - 3}$  :

Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$

Найти  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$ .

Найти  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{11 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ .

Найти  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$ .

### Дифференциальное исчисление. Производная

**Пример.** Найти производную функции  $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$ .

По полученной выше формуле получаем:  $u = x^2 + 3x$ ;  $v = x \cos x$ ;

Производные этих функций:  $u' = 2x + 3$ ;  $v' = \cos x - x \sin x$ ;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

**Пример.** Найти производную функции  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{x \cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

**Пример.** Найти производную функции  $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$\begin{aligned} y' &= \left( x^2 e^{x^2} \right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + x e^{x^2} = 2x e^{x^2} (1 + x^2) \ln x + x e^{x^2} = \\ &= x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x) \end{aligned}$$

### Для самостоятельного решения

Найти производную:  $y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}$

Найти производную:  $y = \sin 2x \cdot \ln x$

Найти производную:  $y = \sin x \cdot e^{-x}$

Найти производную:  $y = (2x + 3)^3$

Найти производную:  $y = \log_3(\ln^4 x)$ .

Найти производную:  $y = (\cos x)^{e^4}$ .

Найти производную:  $y = \arctg(\sqrt[4]{x+2})$ .

Найти производную:  $y = x \cdot 3^{3\cos^2 x}$ .

Найти производную:  $y = \frac{2 + \arcsin \cdot x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ .

### Приложения производной.

**Пример.** Найти асимптоты и построить график функции  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ .

1) Вертикальные асимптоты:  $y \rightarrow +\infty$   $x \rightarrow 0-0$ ;  $y \rightarrow -\infty$   $x \rightarrow 0+0$ , следовательно,  $x = 0$ - вертикальная асимптота.

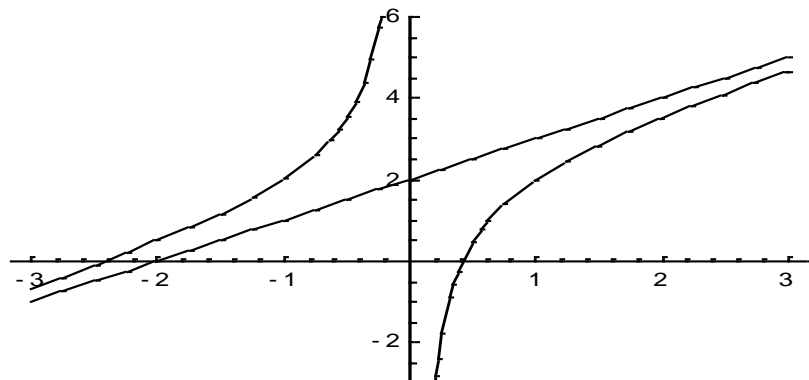
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{x} \right)$$

Таким образом, прямая  $y = x + 2$  является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



**Пример:** Исследовать функцию  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$  и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения  $x$ , кроме  $x = 0$ .

2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.

3. Точки пересечения с координатными осями: с осью  $Ox$ :  $y = 0$ ;  $x = -\sqrt[3]{4}$   
с осью  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y$  – не существует.

4. Точка  $x = 0$  является точкой разрыва  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$ , следовательно, прямая  $x = 0$  является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде:  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота  $y = x$ .

5. Находим точки экстремума функции.

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 2, \quad y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

$y' > 0$  при  $x \in (-\infty, 0)$  – функция возрастает,

$y' < 0$  при  $x \in (0, 2)$  – функция убывает,

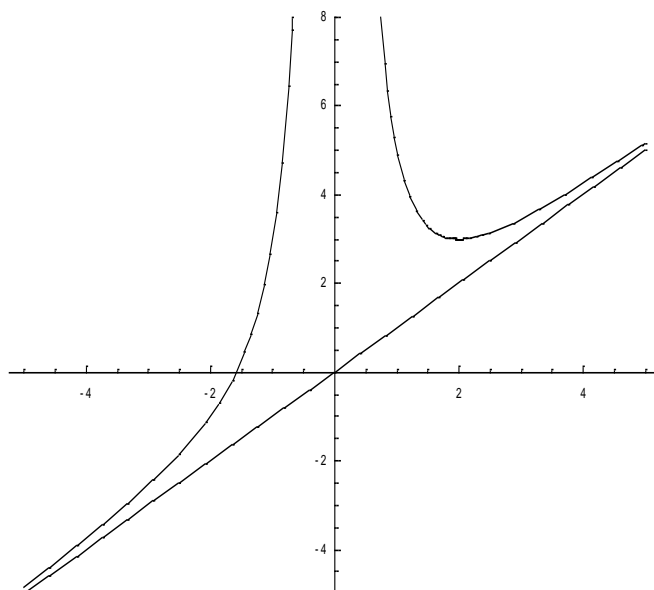
$y' > 0$  при  $x \in (2, \infty)$  – функция возрастает.

Таким образом, точка  $(2, 3)$  является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$  при любом  $x \neq 0$ , следовательно, функция, вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



### Для самостоятельного решения

Исследовать функцию.  $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$  и построить ее график.

### Интегральное исчисление.

### Неопределенный интеграл.

**Пример.** Найти неопределенный интеграл  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$ .

Сделаем замену  $t = \sin x$ ,  $dt = \cos x dx$ .

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

**Пример.**  $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$ .

Замена  $t = x^2 + 1$ ;  $dt = 2x dx$ ;  $dx = \frac{dt}{2x}$ ; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

**Пример.**  $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[ x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

### Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x+1 = t\} = \\ &= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{3} + C = \arcsin \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

### Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx &= \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+3; \quad du = dx; \\ x = u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - \\ - 18 \int \frac{du}{u^2-49} &= \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

### Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{d \operatorname{ctg} 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C$$

### Для самостоятельного решения

Найти интегралы:

$$\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$\int x^2 \arctg x dx.$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{4 + \cos x} dx.$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx.$$

### Определенный интеграл

#### Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### Для самостоятельного решения

Найти интегралы:

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{x^2} dx$$

$$\int_1^2 e^x \left( \frac{1}{e^x} - \frac{2e^{-x}}{x^2} \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{x}{2} dx$$

### Теория вероятности и математическая статистика

1. При перевозке ящика, в котором содержались 25 стандартная и 12 нестандартных деталей, утеряна одна деталь, неизвестна какая. Наудачу извлеченная из ящика деталь оказалось нестандартной. Найти вероятность того, что была утеряна нестандартная деталь.
2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины
 

X	4	7	8
P	0,4	0,4	0,2
3. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распределения
 

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25
4. В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 8 человек. Найти вероятность того, что среди них окажутся 4 женщины.
5. Дисперсия случайной величины  $D(X)=6,25$ . Найти среднее квадратическое отклонение.

## Примерные тесты

### 1 рубеж, 1 семестр

1 вопрос	2 вопрос	3 вопрос	4 вопрос	5 вопрос	6 вопрос	7 вопрос
5 баллов	3 балла	4 балла	3 балла	3 балла	3 балла	4 балла

#### Выберите правильное утверждение:

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны между собой.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты противоположны по знаку.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Даны точки A(-2;7) и B(-4;3). Найти сумму координат середины отрезка АВ

Действительная полуось гиперболы, заданной уравнением  $4x^2 - 9y^2 = 36$  равна

Найти матрицу обратную данной  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

При каком значении  $\alpha$  значение определителя  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix}$  равно 2

Найти область определения функции  $y = \sqrt{25 - x^2}$

Найти производную функции:  $y = \operatorname{ctg} 5x$

2 рубеж, 1 семестр

Баллы на один вопрос:

1 вопрос	2 вопрос	3 вопрос	4 вопрос	5 вопрос	6 вопрос	7 вопрос
5 баллов	3 балла	4 балла	3 балла	3 балла	3 балла	4 балла

#### Выберите правильное утверждение:

Число А называется пределом функции в бесконечности, если бесконечно большой последовательности значений аргумента из области определения, соответствующая последовательность значений функций стремится к А.

Число А называется пределом функции в бесконечности, если для всех значений аргумента из области определения, последовательность значений функций стремится к числу А.

Число А называется пределом функции в бесконечности, если бесконечно большой последовательности значений функций, соответствующая последовательность значений аргумента стремится к А.

Нет правильного ответа

Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5 - 2x - 2\sqrt{x^4 + 1}}$ :

Найти предел по правилу Лопиталя:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x - \sin x}$

Найти дифференциал функции:  $y = \arccos 3x$

Найти интеграл  $\int \frac{x}{x^2 - 3} dx$

Найти интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

Найти среднее квадратическое отклонение, если дисперсия случайной величины  $D(X)=6,25$ .

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

### Список рекомендуемой литературы

#### а) Основная литература:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1: учебник для бакалавров М.: Юрайт, 2019
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учебное пособие. <https://e.lanbook.com/reader/book/149>. СПб.: Лань, 2014 // ЭБС "Лань".
3. Минорский Василий Павлович. Сборник задач по высшей математике, учебное пособие Физико-матем.лит-ры, 2010.
4. Письменный Дмитрий Трофимович Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. Айрис-пресс, 2011
5. Балдин, К.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукоусев. - М.: Дашков и К, 2016. - 472 с

#### б) Дополнительная литература

6. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для прикладного бакалавриата / В.Е. Гмурман. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 479 с.
7. Дзигоева Валентина Созрыкоевна. Сборник задач по алгебре, учебное пособие, СОГУ, 2012
8. Азиев, Арсен Асамоевич . Задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций, учебно-методическое пособие, СОГУ, 2009

#### в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

«Галактика»	№31907480031 от 25.02.2018г.(бессрочно)
BricsCAD	Bricys NV, 30.09.2020г до 30.09.2021г
Электронная библиотека диссертации и авторефератов РГБ(ЭБД РГБ)	<a href="https://dvs.rsl.ru">https://dvs.rsl.ru</a> Требуется регистрация в библиотеке СОГУ
ЭБС"Университетская библиотека ONLINE"	<a href="https://biblioclub.ru">https://biblioclub.ru</a> Требуется регистрация в библиотеке СОГУ
ЭБС «Научная электронная библиотека eLibrary.ru»	<a href="http://elibrary.ru">http://elibrary.ru</a> Требуется регистрация в библиотеке СОГУ
Универсальная баз данных East View	<a href="https://dlib.eastview.com">https://dlib.eastview.com</a> Логин: Khetagurov; Пароль: Khetagurov
ЭБС «Консультант студента» Студенческая электронная библиотека по медицинскому и фармацевтическому образованию, а также по естественным и точным наукам в целом.	<a href="http://www.studentlibrary.ru">http://www.studentlibrary.ru</a> Требуется регистрация в библиотеке СОГУ
ЭБС «Юрайт» - образовательная среда,	<a href="http://www.biblio-online.ru">www.biblio-online.ru</a>

включающая виртуальный читальный зал учебников и учебных пособий от авторов из ведущих вузов России по всем направлениям и специальностям	Требуется регистрация в библиотеке СОГУ
---	---

### Состав лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения

№ п/п	Наименование	№ договора (лицензия)
1	Windows 10 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
2	Windows 10 Pro for Workstations	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
3	Windows 8.1 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
4	Windows 8.1 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
5	Windows 8 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
6	Windows 8 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
7	Windows 7 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
8	Windows 7 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
9	Office Standard 2016	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
10	Office Standard 2013	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
11	Office Standard 2010	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
12	Система тестирования Sunrav WEB Class	№ 468 от 03.12.2013 ИП Сунгатулин Р.Т. (бессрочно)
13	Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Total Security	№ 17E0-180222-130819-587-185 от 26.02. 2018 г. до 14.03.2019 г.
14	Система управления базами данных MySQL FireBird	Свободное программное обеспечение(бессрочно)
16	Консультант+	№ 430-2017/614 от 11.01.2017 г. ООО «Фаст-Информ» (бессрочно)
17	Гарант	01.2020 г. -12.2021г.

### 10. Материально-техническое оснащение дисциплины

Проведение лекционных и практических занятий по дисциплине осуществляется в следующих аудиториях

Математика	<b>Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа:</b> преподавательский стол, стул, столы обучающихся, стулья, кафедра, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки; программное обеспечение: Microsoft Windows 7 Professional, Microsoft Office Standard 2016, 7-zip, WinRAR, Adobe Acrobat Reader, STDU Viewer, Mozilla Firefox, Google Chrome, Kaspersky free (свободное ПО).
	<b>Учебные аудитории для проведения занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также самостоятельной работы обучающихся:</b> преподавательский стол, стул, столы обучающихся, стулья, кафедра, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки; программное обеспечение: Microsoft Windows 7 Professional,

	<p>Microsoft Office Standard 2016, 7-zip, WinRAR, Adobe Acrobat Reader, STDU Viewer, Mozilla Firefox, Google Chrome, Kaspersky free (свободное ПО).</p> <p><b>Лаборатории: компьютерные классы:</b> преподавательский стол; стул; столы обучающихся; стулья; кафедра; классная доска.</p> <p>Оборудование: Компьютеры для компьютерного класса в комплекте, источники бесперебойного питания, Иппон, коммутатор для класса D-Link DGS-10240, интерактивная доска 78* (1702070/15112/11344/2+ проектор Beno MX503).</p> <p>Программное обеспечение: Microsoft Windows 7 Professional; Microsoft Office Standard 2016; 7-zip; WinRAR; Adobe Acrobat Reader; STDUViewer; Mozilla Firefox; Google Chrome; Kaspersky free (свободное ПО); Консультант плюс; демонстрационные и учебно-наглядные пособия (видеопрезентация).</p> <p><b>Библиотека, в том числе читальный зал:</b> столы, стулья; ПК обучающихся.</p> <p>Программное обеспечение: Microsoft Windows 7 Professional; Microsoft Office Standard 2016; 7-zip; WinRAR; Adobe Acrobat Reader; STDU Viewer; Mozilla Firefox; Google Chrome; Kaspersky free (свободное ПО); Консультант плюс.</p> <p>ЭБС "Университетская библиотека ONLINE" <a href="https://biblioclub.ru">https://biblioclub.ru</a></p> <p>ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru">http://www.studentlibrary.ru</a></p> <p>ЭБС «Юрайт» <a href="http://www.biblio-online.ru">www.biblio-online.ru</a></p>
--	--