Программа курса
«Введение в современные методы математической физики»[1]

1. Тематический план

№	Тема	Занятия (ч.)	
		лекции	практич.
1	Обобщенное решение операторного уравнения. Краевая задача и ее оператор. Одномерные краевые задачи. Многомерные краевые задачи.	2	0
2	Положительно определенные операторы. Симметричные и положительно определенные оператор. Неравенство Фридрихса.	2	0
3	Энергетическое пространство положительно определенного оператор. Функционал энергии. Энергетическое пространство положительно определенного оператора. Главные и естественные краевые условия.	2	0
4	Обобщенное решение операторного уравнения. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве.	2	2
5	Расширение положительно определенного оператора. Сопряженный и самосопряженный операторы. Расширение положительно определенного оператора с сохранением нижней грани	2	2
6	Метод Ритца приближенного решения операторного уравнения. Минимизирующая последовательность и ее сходимость.	2	2
7	Спектральная теория положительно определенных операторов. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных элементов самосопряженного оператора. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.	4	0
8	Вариационная формулировка задачи о собственном спектре. Вариационный принцип для первого собственного значения.	2	2
9	Основные теоремы о спектре. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов. Задачи с дискретным спектром.	2	2
10	Теоремы вложения. Одномерные теоремы вложения. Многомерные теоремы вложения. Эквивалентные нормы в пространствах Соболева.	2	0
11	Максиминимальный принцип. Максиминимальный принцип Куранта. Теорема о монотонности спектра.	2	0
12	Процесс Ритца в задаче на собственные значения. Общая схема процесса Ритца. Теорема о наименьшем собственном значении.	2	0

[1] *Курс разработан при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ* (Соглашение № 075-02-2021-1552).

	ИТОГО	26	10

2. Оценочные средства

2.1.Примерный вариант 1 контрольной работы (15 баллов)

Задача 1. Показать, что в задаче

$$Au := -u'' + u = f(x), 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

оператор A обладает свойствами: а) симметрии; б) неотрицательности, но не обладает свойством положительности.

Задача 2. Для функции $u(x)$ из $\mathrm{C}^1([a,b])$, $u(a) = 0$ доказать неравенство Пуанкаре для отрезка $[a,b]$:

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |u'(x)|^2 dx.$$

Задача 3. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = -d^2x/dt^2$ с областью определения $D(A)$, состоящей из функций $x(t)$ таких, что $x(t) \in C^2[0,1]$ и $x(t)$ удовлетворяет граничным условиям $x(0) = x(1) = 0$. Доказать, что A – симметрический оператор.

Задача 4. Доказать, что симметрический оператор A, для которого $R(A) = H$, есть оператор самосопряженный.

2.2.Примерный вариант 2 контрольной работы (15 баллов)

Задача 1. Доказать, что наименьшее значение функционала

$$\varphi(x) = \int_0^1 [x'(t)]^2 dt,$$

Рассматриваемого на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям

$$x(0) = x(1) = 0, \qquad \int_0^1 x^2(t)\, dt = 1,$$

равно π^2, и найти функцию $x_0(t)$, на которой оно достигается.

Задача 2. Доказать что оператор $U\colon\ L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $Ux(t) = -d^2x/dt^2$, с областью определения

$$D(U) = \{x(t) \in L_2[a,b]\colon\ x(t) \in C^2[a,b],\ x(a) = x(b) = 0\}$$

является:

а) положительным; б) положительно определенным.

Задача 3. Доказать, что при положительном операторе A уравнение $Ax = f$ при произвольном $f \in H$ не может иметь более одного решения.

2.3. Примерный вариант 3 контрольной работы (15 баллов)

Задача 1. Если оператор A положительно определен, т.е. $(Au, u) \geq c^2\,(u, u)$ при $u \in D(A)$, то для всех его собственных значений λ выполнено неравенство $\lambda\ \geq\ c^2$.

Задача 2. Доказать, что $\mathcal{H}_A^{(1)} = \mathcal{H}_A \cap \mathcal{H}^{(1)}$

2.4. Примерный вариант 4 контрольной работы (15 баллов)

Задача 1. Определить элемент $u \in H$, являющийся решением вариационной задачи

$$I(u) \to \min, \quad u \in H,$$

$$I(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - l(u).$$

Задача 2. Определить элемент u ∈ H, удовлетворяющий вариационному равенству

$$a(u,v) = l(v)$$

при всех $v \in H$.

3. Вопросы к зачету

1. Обобщенное решение операторного уравнения.
2. Краевая задача и ее оператор. Одномерные краевые задачи.
3. Многомерные краевые задачи.
4. Положительно определенные операторы. Симметричные и положительно определенные оператор.
5. Неравенство Фридрихса.
6. Энергетическое пространство положительно определенного оператор.
7. Функционал энергии. Энергетическое пространство положительно определенного оператора.
8. Главные и естественные краевые условия.
9. Обобщенное решение операторного уравнения.
10. Точка минимума функционала энергии в энергетическом пространстве.
11. Расширение положительно определенного оператора.
12. Сопряженный и самосопряженный операторы.
13. Расширение положительно определенного оператора с сохранением нижней грани
14. Метод Ритца приближенного решения операторного уравнения.
15. Минимизирующая последовательность и ее сходимость.
16. . Спектральная теория положительно определенных операторов.
17. Задача на собственные значения. Свойства собственных значений и собственных элементов самосопряженного оператора.
18. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора.
19. Вариационная формулировка задачи о собственном спектре.
20. Вариационный принцип для первого собственного значения.
21. Основные теоремы о спектре.
22. Определение дискретного спектра. Теорема о дискретности спектра.
23. Представление положительно определенного оператора и его дробных степеней с помощью собственных значений и базиса из собственных элементов.
24. Одномерные теоремы вложения.
25. Многомерные теоремы вложения.
26. Эквивалентные нормы в пространствах Соболева.
27. Максиминимальный принцип Куранта.
28. Теорема о монотонности спектра.
29. Процесс Ритца в задаче на собственные значения. Общая схема процесса Ритца.
30. Теорема о наименьшем собственном значении.

4. Литература

1. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Приложения индефинитной метрики. Симферополь:
2. ДИАЙПИ, 2014. - 276 с.
3. Березанский Б. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Киев: Выша школа, 1990. - 600 с.
4. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. - 688 с.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1989. - 624 с.
6. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука., 1989. -416с.

7. Копачевский Н. Д. Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. Симферополь: ФОРМА, 2016. - 280 с.
8. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. - 400 с.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Том. 1. М.-Л.: Гостех-издат, 1933. - 525 с.
10. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. -512с.
11. Михлин С. Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968. - 576 с.
12. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1977. – 432 с.
13. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. - 384 с.
14. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. - 588 с.
15. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. - М.: Мир, 1985. - 590 с.
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - М.: ГИТТЛ, 1953. - 680 с.