

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича Хетагурова»



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Линейная алгебра

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль «Экономика»

Квалификация (степень) выпускника - бакалавр

Форма обучения - заочная

Владикавказ 2016 г.

Программа составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.11.2015 г., № 1327, учебным планом подготовки бакалавра по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, профиль «Экономика», одобренным Ученым советом ФГБОУ ВО «СОГУ», от 03.03.2016 г., протокол № 8.

Составители: доцент, к.э.н. Хугаева Л.Т.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры математического анализа

(протокол № 4 от 26 февраля 2016 г.)

Программа одобрена советом экономического факультета

(протокол № 6 от «29» февраля 2016 г.)

1. Структура, и общая трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетные единицы (216 часа).

	Очная форма обучения
Курс	1
Семестр	
Лекции	8
Практические (семинарские) занятия	10
Лабораторные занятия	
Консультации	
Итого аудиторных занятий	
Самостоятельная работа	189
Курсовая работа	
экзамен	9
Зачет	-
Общее количество часов	216

2. Цели изучения дисциплины:

- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования процессов и явлений социально-экономического характера при поиске оптимальных решений;
- решение экономических задач;
- воспитание достаточно высокой математической культуры;
- выработка ясного понимания необходимости математической составляющей в общей подготовке студентов;
- выработка представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре;
- умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже общими и предметно-специализированными компетенциями. Они способствуют его социальной мобильности, устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (научно-исследовательская деятельность, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

Задачи изучения дисциплины:

В результате освоения данной дисциплины обучающийся должен:

- овладеть культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения.
- способствовать выработке у студентов устойчивых навыков работы с этими основными математическими понятиями на уровне, соответствующем их дальнейшему прикладному применению;
- сформировать у студентов представление о теоретических основах тех экономико-математических методов и моделей, которые будут изучаться в дальнейшем.

3. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.

Дисциплина «Линейная алгебра» является дисциплиной базовой части учебного плана по программе бакалавриата 38.03.01 Экономика Б1.Б.08.

Для изучения дисциплины необходимы знания и компетенции, полученные обучающимися в рамках школьной программы по дисциплинам: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия».

Знания, умения и навыки, полученные в ходе изучения данной дисциплины, будут востребованы студентами на всех этапах обучения при освоении различных дисциплин учебного плана, подготовке рефератов, контрольных, курсовых и выпускных квалификационных работ, в процессе последующей профессиональной деятельности

4. Требования к результатам освоения дисциплины

Коды компетенций	Содержание компетенций
ОПК-3	способностью выбрать инструментальные средства для экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы
ПК-1	способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов

Взаимосвязь планируемых результатов обучения по дисциплине с формируемыми компетенциями ОПОП

Коды компетенций	Планируемые результаты обучения, соответствующие формируемым компетенциям ОПОП
------------------	--

ОПОП	Знать	Уметь	Владеть
ОПК-3	<p>Основные понятия дисциплины, определения, содержательное значение терминов и их взаимосвязь, алгоритмы доказательств и решения задач</p> <p>Основные методы линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые для постановки, математического моделирования и решения экономических задач</p>	<p>решать стандартные профессиональные задачи с применением методов линейной алгебры и аналитической геометрии</p> <p>определять возможности применения теоретических положений и методов линейной алгебры для постановки и решения конкретных прикладных задач</p> <p>выбрать инструментальные средства для экономических данных в соответствии с поставленной задачей;</p> <p>анализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.</p> <p>решать стандартные профессиональные задачи с применением методов линейной алгебры и аналитической геометрии</p>	<p>навыками :теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности</p> <p>методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических процессов</p> <p>методами применения современного математического инструментария для решения экономических задач;</p> <p>статистическими методами обработки экспериментального материала</p>

ПК-1	<p>основы линейной алгебры, необходимые для постановки, математического моделирования и решения экономических задач</p>	<p>составлять экономико-математические модели,</p> <p>применять методы теоретического и экспериментального исследования для решения экономических задач;</p> <p>анализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов</p>	<p>навыками построения математических моделей профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов</p> <p>методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических процессов</p> <p>методами применения современного математического инструментария для решения экономических задач;</p> <p>статистическими методами обработки экспериментального материала</p>
------	---	--	---

5. Содержание и учебно-методическая карта дисциплины

Номер недел и	Наименование тем (вопросов), изучаемых по данной дисциплине	Занятия		Самостоятельная работа Студентов		Формы контроля	Количество баллов		литература
		л	пр	Содержание	Часы		min	max	
	Текущая работа студентов						0	20	
1	Прямоугольная система координат. Расстояние между двумя точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении. Полярная система координат.	0.5	0.5	Площадь треугольника и многоугольника.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [3], [3], [4]],[5]
2	Уравнение линии. Некоторые элементарные задачи. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой.	0.5	0.5	Линии спроса и предложения.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [3], [4], [5],[6]],[7]
3	Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.	0.5	0.5	Нормаль-ное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [3], [5],[7]
4	Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Полярная система координат.	0.5	0.5	Уравнение бюджетной линии.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2], [4],[5]],[7]

5	Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Полярная система координат.	0.5	0.5	Использование кривых второго порядка в экономике	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2], [4],[5],[6],[7]
6	Определители квадратных матриц. Свойства определителей. Способы вычисления определителей.	0.5	0.5	Доказательство свойств определителей	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2], [4], [5],[7]]
7	Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Элементарные преобразования над матрицами.	0.5	0.5	Транспонирование матриц. Умножение матриц.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2], [4], [5],, [7]
8	Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы.	0.5	0.5	Ранг матрицы.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[4], [5],[6],[7]
9	Системы m линейных уравнений с m переменными. Основные понятия и определения. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера.	0.5	0.5	Ранг матрицы.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[4], [5],[6],[7]
10	Теорема Кронекера - Капелли. Метод обратной матрицы. Метод Гаусса.	0.5	0.5	Решение системы уравнений методом итерации.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[4], [5],[7]]
11	Системы m линейных уравнений с n переменными. Системы линейных однородных уравнений.	0.5	1	Фундаментальная система решений.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[3], [5],[6],[7]

12	Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Использование систем линейных уравнений при решении экономических задач.	0.5	1	Решение задач с экономическим содержанием	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[4], [5],[7]
13	Векторы на плоскости и в пространстве. Длина и направление вектора. Проекция вектора на ось.	1	1	Линейная зависимость и независимость векторов	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2],[4], [5],[7]
14	Разложение вектора по базису. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. n-мерный вектор и векторное пространство. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство.	1	1	Смешанное произведение векторов.	13.5	Вопрос на экзамене			[1], [2], [4], [5],[6],[8]
	Итого часов	8	10		189	Вопрос на экзамене			

6. Образовательные технологии

Для достижения планируемых результатов освоения дисциплины, используются различные образовательные технологии:

- традиционные лекции и практические (семинарские) занятия с использованием современных интерактивных технологий;
- лекция-диалог – содержание подается через серию вопросов, на которые студент должен отвечать непосредственно в ходе лекции;
- доклад (реферат) – студент готовит краткое сообщение по вопросу темы, оформляет работу в соответствии с требованиями и сдает ее преподавателю
- онлайн-занятие – разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или через Интернет в режиме реального времени. Каждый из участников находится у своего компьютера (средства связи), а связь между ними поддерживается через Интернет посредством загружаемого приложения, установленного на компьютере каждого участника (Zoom, Meet, Skype, Webex и др.);
- видеоконференция – сеанс видеоконференцсвязи (ВКС) – это технология интерактивного взаимодействия двух и более участников образовательного процесса для обмена информацией в реальном режиме времени.

Технология электронного обучения - реализуется при помощи электронной образовательной среды СОГУ (при использовании ресурсов ЭБС), в ходе проведения автоматизированного тестирования и т. д.

7. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Самостоятельная работа обучающихся является одним из видов учебных занятий. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Самостоятельная работа обучающихся осуществляется на протяжении изучения всей дисциплины в соответствии с утвержденной в учебном плане трудоемкостью (для очной формы обучения 216 часов) и состоит из:

- работы студентов с лекционными материалами, поиска и анализа литературы и электронных источников информации по заданной теме;
- выполнения заданий для самостоятельной работы в ЭИОС СОГУ;
- подготовки к экзамену.

Темы и формы внеаудиторной самостоятельной работы, ее трудоёмкость содержатся в разделе 5, табл. 5.1.

Методические указания по проведению практических занятий

В начале практического занятия следует обратить внимание на теоретические вопросы по теме занятия. Первоначально идет изложение теоретического материала темы занятия. Затем в ряде вопросов преподавателя следует сконцентрировать внимание на основных идеях темы занятия. Вопросы должны включать в себя различные вариации элементарных ситуаций, отображающих основные идеи темы занятия в их взаимной взаимосвязи. Задаваемые вопросы-задачи должны быть короткими и максимально проявлять в студентах их сообразительность.

После предварительной части следует начинать решать задачи, имеющих более длинные сценарии взаимодействия основных идей темы занятия. При этом следует избегать трудоемких задач, включающих освоение незначительного числа приемов. В процессе решения задачи следует всегда увязывать шаги алгоритма решения задачи с теоретическими основами изучаемого алгоритма и добиваться понимания механизма действия изучаемого алгоритма.

Различают фронтальный, индивидуальный и комбинированный опрос.

Фронтальный опрос проводится в форме беседы преподавателя с группой.

Он органически сочетается с повторением пройденного, являясь средством для закрепления знаний и умений. Его достоинство в том, что на активную умственную работу можно вовлечь всех студентов группы. Для этого вопросы должны допускать краткую форму ответа, быть лаконичными, логически взаимосвязанными друг с другом. С помощью фронтального опроса преподаватель имеет возможность проверить выполнение студентами домашнего задания, выяснить готовность группы к изучению нового материала.

Индивидуальный опрос предполагает обстоятельные, связные ответы студентов на вопрос, относящийся к изучаемому учебному материалу, поэтому он служит важным учебным средством развития речи, памяти, мышления студентов. Чтобы сделать такую проверку более глубокой, необходимо ставить перед студентами вопросы, требующие развернутого ответа.

Вопросы для индивидуального опроса должны быть четкими, ясными, конкретными, емкими, иметь прикладной характер, охватывать основной, ранее пройденный материал программы. Их содержание должно стимулировать студентов логически мыслить, сравнивать, анализировать, доказывать, подбирать убедительные примеры, устанавливать причинно-следственные связи, делать обоснованные выводы и этим способствовать объективному выявлению знаний студентов.

Вопросы обычно задают всей группе и после небольшой паузы, необходимой для того, чтобы студенты поняли его и приготовились к ответу, вызывают для ответа конкретного студента.

Письменная проверка наряду с устной является важнейшим методом контроля знаний, умений и навыков студентов. Однородность работ, выполняемых студентами, позволяет предъявлять ко всем одинаковые требования, попытаться объективности оценки результатов обучения. Применение этого метода дает возможность в наиболее короткий срок одновременно проверить усвоение учебного материала всеми студентами группы, определить направления для индивидуальной работы с каждым.

Письменная проверка используется во всех видах контроля и осуществляется как в аудиторной, так и во внеаудиторной работе (выполнение домашних заданий).

Методические рекомендации по написанию рефератов (докладов)

Реферат (доклад) – письменная работа по определенной научной проблеме, краткое изложение содержания научного труда или научной проблемы. Он является действенной формой самостоятельного исследования научных проблем на основе изучения текстов, специальной литературы, а также на основе личных наблюдений, исследований и практического опыта. Реферат помогает выработать навыки и приемы самостоятельного научного поиска, грамотного и логического изложения избранной проблемы и способствует приобщению студентов к научной деятельности.

Последовательность работы:

1. Выбор темы исследования. Тема реферата выбирается студентом на основе его научного интереса. Также помощь в выборе темы может оказать преподаватель.

2. Планирование исследования. Включает составление календарного плана научного исследования и плана предполагаемого реферата. Календарный план исследования включает следующие элементы: выбор и формулирование проблемы, разработка плана исследования и предварительного плана реферата; сбор и изучение исходного материала, поиск литературы; анализ собранного материала, теоретическая разработка проблемы; сообщение о предварительных результатах исследования; литературное оформление исследовательской проблемы; обсуждение работы (на семинаре и т. п.).

План реферата характеризует его содержание и структуру. Он должен включать в себя: введение, где обосновывается актуальность проблемы, ставятся цель и задачи исследования; основная часть, в которой раскрывается содержание проблемы; заключение, где обобщаются выводы по теме и даются практические рекомендации.

3. Поиск и изучение литературы. Для выявления необходимой литературы следует обратиться в библиотеку или к преподавателю. Подбранную литературу следует зафиксировать согласно ГОСТ по библиографическому описанию произведений печати.

Для разработки реферата достаточно изучение 4-5 важнейших статей по избранной проблеме. При изучении литературы необходимо выбирать материал, не только подтверждающий позицию автора реферата, но и материал для полемики.

4. Обработка материала. При обработке полученного материала автор должен: систематизировать его по разделам; выдвинуть и обосновать свои гипотезы; определить свою позицию, точку зрения по рассматриваемой проблеме; уточнить объем и содержание понятий, которыми приходится оперировать при разработке темы; сформулировать определения и основные выводы, характеризующие результаты исследования; окончательно уточнить структуру реферата.

5. Оформление реферата. При оформлении реферата рекомендуется придерживаться следующих правил: Следует писать то, что ет выразить сущность проблемы, ее логику; Писать строго последовательно, логично, доказательно (по схеме: тезис – обоснование – вывод); Писать, выражая свою позицию, пропагандируя полученные результаты; Писать осмысленно, соблюдая правила грамматики, не злоупотребляя наукообразными выражениями.

Реферат выполняется в соответствии с требованиями стандартов, разработанных для данного вида документов. Работа должна быть выполнена на белой бумаге стандартного листа А4. Текст должен быть отпечатан на компьютере в текстовом редакторе MicrosoftWord и отвечать следующим требованиям: параметры полей страниц должны быть в пределах: верхнее и нижнее – по 20 мм, правое – 10 мм, левое – 30 мм, шрифт – TimesNewRoman , размер шрифта – 14, межстрочный интервал – полуторный. Нумерация страниц в реферате должна быть сквозной, начиная с третьей страницы. Номер проставляется арабскими цифрами снизу каждой страницы справа.

При изложении материала необходимо придерживаться принятого плана.

Библиографический список составляется на основе источников, которые были просмотрены и изучены студентом при написании реферата. Данный список отражает самостоятельную творческую работу студента, что позволяет судить о степени его подготовки и углублении в выбранную тематику. Вся использованная литература размещается в следующем порядке: законодательные акты, постановления, нормативные документы; вся учебная литература в алфавитном порядке, затем средства периодической печати в алфавитном порядке; источники из сети Интернет.

Темы рефератов (докладов)

1. Геометрический смысл знака многочлена.
2. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики
3. Операции над многочленами.Алгоритм Евклида.
4. Числа Фибоначчи. Золотое сечение.
5. Удивительное число пи.
6. Магические квадраты.
7. Знаменитые задачи древности.
8. Интуиция и математика.
9. Параболоиды. Гепербалоиды.
10. Связь математики с другими науками.

8. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Вопросы к экзамену

- 1.Расстояние между двумя точками на плоскости.
- 2.Деление отрезка в данном отношении.
- 3.Уравнение линии. Некоторые элементарные задачи.

4. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
5. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках.
6. Угол между двумя прямыми.
7. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.
8. Уравнение прямой проходящей через одну точку.
Уравнение прямой, проходящей через две точки.
9. Полярная система координат
10. Связь между полярными и прямоугольными координатами.
11. Окружность
12. Эллипс
13. Гипербола
14. Парабола
15. Определители квадратных матриц.
16. Свойства определителей.
17. Способы вычисления определителей.
18. Основные сведения о матрицах.
19. Операции над матрицами.
20. Элементарные преобразования над матрицами.
21. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы.
22. Понятие вектора на плоскости.
23. Линейные операции с векторами в геометрической форме.
24. Проекция вектора на ось и ее свойства.
25. Скалярное произведение. Определение, свойства.
26. Вычисление скалярного произведения в координатной форме.
27. Длина вектора, направляющие косинусы вектора.
28. Угол между двумя векторами.
29. Векторное произведение, определение, свойства.
30. Вычисление векторного произведения в координатной форме.
31. Компланарность трех векторов. Смешанное произведение векторов, определение, свойства.

Примерные задания для контрольных работ
Уравнение линии на плоскости

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки А(1, 2) и В(3, 4).

Применяя формулу $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, получаем:

$$y - 2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1 - \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4$$

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .

Находим уравнение стороны AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; $4x = 6y - 6$;

$$2x - 3y + 3 = 0; \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C , то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

Для самостоятельного решения:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;1)$ под углом 45° к оси Ox .

Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;3)$

Даны вершины треугольника $A(-1;3)$; $B(3;-2)$ и $C(5;3)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC параллельно данной прямой.

Даны вершины треугольника: $A(3;0)$, $B(-5;6)$ и $C(-4;1)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C .

Даны вершины треугольника: $A(3;5)$, $B(-3;3)$ и $C(5;-8)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины C .

Найти угловые коэффициенты прямых и определить, какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$ 1) $4x + 8y + 17 = 0$; 2) $4x - 8y - 11 = 0$; 3)

$$y = -\frac{1}{2}x + 6; \quad 4) y = -2x - 7 \quad 5) \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

Даны вершины треугольника $A(3;0)$; $B(-5;6)$ и $C(-4;1)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C .

Даны точки A(2;4) и B(-2;6). Найти сумму координат середины отрезка AB

Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(-3;3)

Определители и матрицы

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{matrix} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{matrix}$$

$$\text{Таким образом, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}A = 2$$

Для самостоятельного решения:

Найти алгебраические дополнения элементов 3-го столбца матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вычислить определитель, разложив его по элементам 2-й строки

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$

Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C = AB^T$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$

Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить матрицу $D=ABC$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

Пример. Найти решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Для самостоятельного решения:

Решить системы методом Гаусса, по формулам Крамера и методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

Векторы

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

Т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8:$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2, \quad |\vec{c}| = 3, \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 +$$

$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \quad \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.}$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Для самостоятельного решения:

Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Даны векторы $\vec{a} = (-3; 4; 1)$ и $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Найти скалярное произведение векторов

Даны векторы $\vec{a} = (-2; 3; 4)$ и $\vec{b} = (1; 1; 0)$. Найти векторное произведение векторов

Доказать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.

Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7,3,4), B(1, 0, 6), C(4, 5, -2).

Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

Примеры экзаменационных билетов

Экзаменационный билет №1

Кафедра математического анализа

Дисциплина *Линейная алгебра*

Факультет *Экономический*

Направление *Экономика*

Курс *1*

1. Исследование формы гиперболы.
2. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$$\vec{a} = \{3; -2; 1\}, \vec{b} = \{2; 1; 1\}, \vec{c} = \{3; -1; -2\}.$$

3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

Экзаменационный билет №2

Кафедра математического анализа

Дисциплина *Линейная алгебра*

Факультет *Экономический*

Направление *Экономика*

Курс *1*

1. Каноническое уравнение эллипса
2. Разложение вектора по базису в пространстве
3. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Экзаменационный билет №3

Кафедра математического анализа

Дисциплина *Линейная алгебра*

Факультет *Экономический*

Направление *Экономика*

Курс *1*

1. Исследование формы эллипса.
2. Линейные операции с векторами в геометрической форме.
3. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 7 \\ 6 & -12 & -3 & 15 \end{vmatrix};$$

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) основная литература:

1. Э.Б. Винберг. Курс алгебры. Москва, МЦНМО, 2013, 592 стр.– Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63299
2. А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры. Москва, МЦНМО, 2012, 272 стр. –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=search_red
3. Минорский Василий Павлович Сборник задач по высшей математике, учебное пособие. Изд.Физико-матем.лит-ры, 2010;

4. А.Г.Курош. Лекции по общей алгебре. Москва, Лань, 2007, 555 стр. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=220855
5. А.И.Кострикин (под редакцией). Сборник задач по алгебре. Москва, МЦНМО, 2009, 408 стр. –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=search_red

б) Дополнительная литература

6. В.А. Койбаев Основы алгебры. –Владикавказ: СОГУ, 2005(\\icd\books\math\Алгебра и Геометрия)
7. Кремер, Н.Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата— 2-е изд., испр. и доп.— Москва: Издательство Юрайт, 2014.— 304с.— //ЭБС Юрайт -[URL: <https://urait.ru/book/lineynaya-algebra-380234>
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2001– URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=search_red

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

<i>Интернет-ресурсы</i>	
1. Электронная библиотека диссертации и авторефератов РГБ (ЭБД РГБ) (https://dvs.rsl.ru).	
2. ЭБС «Университетская библиотека online» (https://biblioclub.ru).	
3. ЭБС «Научная электронная библиотека eLibrary.ru» (http://elibrary.ru).	

Состав лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства

№ п/п	Наименование	№ договора (лицензия)
1.	Windows 7 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.
2.	OfficeStandard 2016	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016 г.

10. Материально-техническое оснащение дисциплины

Проведение лекционных и семинарских занятий по дисциплине осуществляется в следующих аудиториях:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа: преподавательский стол; стул; столы обучающихся; стулья; кафедра; классная доска, демонстрационное оборудование - мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки, программное обеспечение: Windows 8.1 Professional; OfficeStandard 2010; Антивирусное программное обеспечение KasperskyTotalSecurity; Система поиска текстовых

<p>заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»; Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»; Консультант Плюс; Гарант; Moodle, CiscoWebex; учебно-наглядные пособия</p>
<p>Учебные аудитории для занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: преподавательский стол; стул; столы обучающихся; стулья; кафедра; классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки, программное обеспечение: Windows 8.1 Professional; Office Standard 2010; Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security Cloud; Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»; Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»; Консультант плюс; Гарант; Moodle; x;</p>
<p>Лаборатория- компьютерный класс для текущего контроля (тестирование): преподавательский стол, преподавательский стул, столы обучающихся, стулья, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), колонки, ПК преподавателя, ПК обучающихся, программное обеспечение: Windows 7.1 Professional; Office Standard 2016; WinRAR; Microsoft Visio; Microsoft Visual Studio; Kaspersky Security Cloud; Консультант Плюс, Гарант, Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний», Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ», Moodle, x;</p>
<p>Помещения для самостоятельной работы:</p> <ul style="list-style-type: none"> - компьютерный класс с доступом к ресурсам сети Интернет: преподавательский стол, преподавательский стул, столы обучающихся, стулья, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), колонки, ПК преподавателя, ПК обучающихся, программное обеспечение: Windows 7.1 Professional; Office Standard 2016; WinRAR; Microsoft Visio; Microsoft Visual Studio; Kaspersky Security Cloud; Консультант Плюс, Гарант, Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний», Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ», Moodle, x; - библиотека, в том числе читальный зал: столы, стулья, компьютеры (в т.ч. с выходом в интернет, доступом в ЭИОС), программное обеспечение: Adobe Flash Player 31; Adobe Reader 10; Java 6.0; K-Lite Codec Pack; WinRAR; Microsoft Office 10; Microsoft Visio 10; Microsoft Visual Studio; Консультант плюс. Moodle, x; учебные и научные фонды библиотеки СОГУ, доступ к электронным библиотечным ресурсам: <p>ЭБС "Университетская библиотека Online" http://www.biblioclub.ru</p> <p>Электронная библиотека диссертаций РГБ (ЭБД РГБ) https://dvs.rsl.ru</p> <p>Электронная библиотека «Консультант студента» http://www.studmedlib.ru/</p> <p>Научная электронная библиотека eLibrary.ru http://elibrary.ru</p> <p>База данных «ЭБС eLibrary» http://elibrary.ru</p> <p>Электронная библиотека «Юрайт» http://biblio-online.ru</p>